

1915.

LIBRARY
MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE.

No. 11.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

J. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEHORN, P. BRAEKE.

VIERTE FOLGE.

Band 47. Heft 3.

DER GANZEN REIHE 302. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT FÜNF TÄFELN.



LEIPZIG, 1915.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH,
DÖRRIENSTRASSE 14.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postbüros und von der Verlagbuchhandlung abgenommen. Preis für den in 24 Heften (= 8 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 Kr.
(Ausgabejahr mit 26. Juni 1915)

Inhalt.

| | Seite |
|--|-------|
| 1. Siegfried Becher. Über den Astigmatismus des Nicols und seine Beseitigung im Polarisationsmikroskop. (Hierzu Tafel I, II u. III.) | 285 |
| 2. F. v. Hauer. Spontane Temperaturschwankungen in einem Gase | 365 |
| 3. R. Glocker. Interferenz der Röntgenstrahlen und Kristallstruktur. (Hierzu Tafel IV u. V.) | 376 |

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzusezeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingesetzt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornameas, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 47.

**1. Über den Astigmatismus des Nicols
und seine Beseitigung im Polarisationsmikroskop;
von Siegfried Becher.**

(Hierzu Tafel I, II u. III.)

I. Teil. Beschreibung und Theorie des Fehlers.

1. Ausgangspunkt der Untersuchung.

Als ich im Jahre 1913, bei Gelegenheit einer zoologischen Untersuchung über das Skelett der Echinodermen, das Polarisationsmikroskop als Untersuchungsmittel heranzog und Mikrophotographien von Schliffen im verdunkelten Gesichtsfeld zwischen gekreuzten Nicols anfertigen mußte, bediente ich mich zunächst eines älteren Instrumentes mit Okularaufsatzanalysator. Mit der Einstelllupe glaubte ich dabei wahrnehmen zu können, daß die Bilder bei langen Kameraauszügen besser wurden als bei geringer Entfernung der Platte vom Okular. Da es mir aber bekannt war, daß die optimalen Eigenschaften der Objektive bei Verwendung von gewöhnlichen Okularen nur dann zur Geltung kommen, wenn die Strahlen aus dem Okular innerhalb der einzelnen Lichtbündel parallel austreten, so schob ich die bessere Leistung bei längerem Kameraauszug der Annäherung an jenes Ideal zu.

Die Schärfe der Aufnahmen war schließlich ziemlich befriedigend geworden. Ich fürchtete aber noch die Bildverzerrung des mit schrägen Endflächen versehenen Aufsatznicols, das den unter gleichen Winkeln zur Achse, aber verschiedenen Azimutthen, eintretenden Strahlen verschiedene Parallelversetzungen erteilt. Diese Bildverzerrung ist bei einem Thompsonschen Prisma mit geraden Endflächen zwar auch vorhanden, aber geringer und in den einzelnen Quadranten des „Gesichtsfeldes“ gleich, so daß ich in der Erwartung noch besserer Resultate von neuem an die Arbeit ging, als mir von optischer Seite geraten und ermöglicht wurde, mit einem modernen Polarisationsmikroskop zu arbeiten, das einen Tubusanalysator mit

Thompson'schem Prisma aufwies. Die erhaltenen Bilder waren aber — zumal bei der Verwendung stärkerer Okulare — ganz auffallend unschärfer als die früher erhaltenen, und das Ergebnis war durch Verlängerung des Balkenauszuges nicht zu verbessern. Ich sagte mir schon damals, ohne die Erscheinung klar zu durchschauen, daß der Unterschied damit zusammenhängen müßte, daß bei der ersten Methode der Analysator bei der großen Bildweite von nahezu parallelen, bei der zweiten Methode aber von den konvergenten Büscheln im Mikroskop-tubus durchsetzt wurde. Unter Beachtung des damit gegebenen Gesichtspunktes mußte es praktisch erscheinen, durch Wahl einer sehr großen Bildweite ungefähr parallele Strahlen herzustellen, das Nicol von diesen parallelen Strahlen durchsetzen zu lassen und die gewünschte Vergrößerung (soweit es die Auflösungskraft eines Objektives gestattet) durch Verlängerung der Bildweite und nicht durch Okularvergrößerung zu erreichen. Ich entfernte also das Okular vollständig und ersetzte die Mikroskopobjektive, die ohne Okular bei der in der Korrektion nicht vorgesehenen Bildweite schlechte Resultate geben mußten, durch kleine mikrophotographische Objektive (Luminare von Winkel). Das Tubusnicol befand sich dann dicht hinter dem Objektiv in dem Strahlengang, der dort innerhalb der einzelnen Büschel nahezu parallele Strahlen aufwies. Der Erfolg war bei dieser Anordnung völlig zufriedenstellend und die Sache für mich einstweilen erledigt.

Schon früher war mir indessen eine andere Erscheinung aufgefallen, die ich mir lange Zeit nicht zu erklären vermochte und deren Zusammenhang mit der eben besprochenen Unschärfe mir lange verborgen blieb. Beim Gebrauch der Mikrometerschraube beobachtet man nämlich bei Einschaltung des Analysators ein eigenartiges Hin- und Hertanzen der Details eines Präparates, das mich lebhaft an das bekannte Tanzen der Querschnitte von Muskelfibrilen erinnerte, die in einem Präparat etwas schrägläufen und deren optischer Querschnitt bei dem Spiel der Mikrometerschraube und dem Auf- und Abrücken der Ebene scharfer Einstellung seitliche Verschiebungen erfahren muß. Meine Objekte zeigen eine äußerst feine Gerüststruktur, in der sich verschieden gerichtete Balkensysteme durchsetzen, so daß der Gedanke nahelag, das Tanzen in verschiedener Richtung mit der verschiedenen Richtung

der Balken in Verbindung zu bringen. Ich stellte jedoch bald fest, daß das Tanzen immer in zwei aufeinander senkrechten Richtungen stattfindet und mit den Balkenrichtungen nichts zu tun hat. Dann tauchte der Gedanke auf, daß die Erscheinung irgendwie mit der Doppelbrechung zusammenhängen müßte; doch dachte ich dabei immer noch an eine Wirkung des (doppeltbrechenden) Materiales, an dem ich die Erscheinung wahrnahm, und nicht an den störenden Einfluß, den ein Nicol auf den Strahlengang ausübt.

Die Sache, die für mich als Zoologen nur eine gelegentliche und nebensächliche Beobachtung darstellte, fing aber an, mich zu interessieren, und ich fand bald den richtigen Weg zur Erklärung, als ich bei genauer Betrachtung des Schleifstaubes, der zuweilen in dem Gerüstwerk meiner Schliffe zurückbleibt und in der Nähe derselben in den Balsam übertritt, bemerkte, daß man die bei gekreuzten Nicols als ungemein feine Lichtpunkte erscheinenden Partikelchen nicht absolut scharf einstellen kann. Das Punktbild ist nie vollkommen, und der Versuch, mit der Mikrometerschraube die richtige Einstellung zu finden, bewirkt nur, daß sich der Punkt in der einen oder der dazu senkrechten Richtung in eine feine Linie auszieht, während bei Dunkelfeldbeobachtung mit dem gewöhnlichen Mikroskop jeder Punkt bei Verstellung der Mikrometerschraube in ein Lichtscheibchen bzw. in Lichtkreise verbreitert wird. Ich erkannte nun, daß es sich um eine astigmatische Erscheinung handelte. Beobachtungen an Staub von einer isotropen Substanz lehrten, daß die Erscheinung nichts mit der doppeltbrechenden Natur des Schleifstaubes meiner Präparate zu tun hatte. Der Polarisator und die spezielle Beleuchtung des Objektes konnten für das Zustandekommen der Erscheinung gleichfalls nicht in Betracht kommen, denn sie war in derselben Weise zu beobachten, wenn ohne Polarisator Dunkelfeldbeleuchtung hergestellt wurde. Sie verschwand jedoch sofort, wenn der Tubusanalysator ausgeschaltet wurde. Nur dieser konnte also die beobachtete Erscheinung veranlaßt haben. Damit ergab sich von selbst, daß die Unschärfe der Bildpunkte auch die mangelhafte Schärfe des Bildes beim Photographieren bewirkt hatte, und weiterhin wurde klar, daß das Tanzen der Einzelheiten im Bilde dadurch zustande kam, daß bei dem Wechsel der Einstellung die ein-

zellen Bildpunkte in Linien ausgezogen wurden, und zwar in der einen oder der dazu senkrechten Richtung, je nach der Höhe des betreffenden Objektpunktes im Präparat.

Es ist auffallend, daß die skizzierte Erscheinung, soweit ich sehe, in der Literatur bisher kaum¹⁾ Erwähnung gefunden

1) Erneutes Suchen in der Literatur, für das ich Herrn Dr. Berek und Herrn Privatdozent Dr. Jentzsch zu großem Dank verpflichtet bin, hat ergeben, daß der in Rede stehende Fehler doch schon an einer Stelle Erwähnung gefunden hat und als astigmatisch benannt worden ist. C. Tissot und F. Pellin berichten darüber (Compt. rend. **145**, p. 866 u. 867. 1907; vgl. auch: Journ. de Phys. **7**, p. 296. 1908 und Beiblätter zu den Ann. d. Phys. **32**, p. 515 u. 516. 1908) in einer kurzen Mitteilung, aus der jedoch hervorgeht, daß die Autoren — wenn nicht die Kürze der Mitteilung ($1\frac{1}{2}$ Seiten) Ursache schiefer Ausdrucksweise war — keine klare Einsicht in die Natur des Fehlers gehabt haben. Der Fehler soll bei den Nicolschen Prismen besonders stark sein, weil die durchgelassenen extraordinären Strahlen nach der Brechung nicht in der Einfallsbene weiter verlaufen. Dagegen muß betont werden, daß der Fehler auch dann vorhanden sein würde, wenn nur die im Hauptschnitt und der dazu senkrechten Ebene verlaufenden Strahlen vorhanden wären, die, wie unsere genauere Betrachtung eines Thompsonschen Prismas zeigt, nicht aus der Einfallsbene austreten. Auch die für das theoretische Verständnis wichtige Beziehung zu dem Sorbyschen Phänomen wurde nicht erkannt. Auch die Empfehlung einer über dem Okular anzubringenden Zylinderlinse zur Korrektion des Fehlers läßt erkennen, daß die französischen Forscher die Bedingungen seines Auftretens nicht klar durchschauten. Die Korrektion mit einer Zylinderlinse ist stets nur eine angeneherte; sie wäre höchst unpraktisch, weil das Okular dann bei Drehung des Analysators mitgedreht werden müßte, und sie läßt sich nicht durchführen, weil die Brechkraft der Korrektionslinse eines und desselben Okulars bei Anwendung verschiedener Objektive verschieden stark sein müßte. Leider blieb die verdienstvolle Anregung auch ohne jeden Einfluß sowohl in der Literatur wie im Mikroskopbau. Die Nichtachtung des mangelhaften Korrektionszustandes könnte überhaupt die Meinung erwecken, daß der Fehler wirklich geringfügig wäre. Das ist aber, wie unsere Ausführungen zeigen, durchaus nicht der Fall. Auch zweifle ich nicht, daß der Fehler oft gesehen und als störend empfunden worden ist, z. B. bei Mikroprojektion mit dem Polarisationsmikroskop, für die dann auch ohne nähere Begründung der Aufsatzanalysator empfohlen und benutzt zu werden pflegt. Meist hat man die Unschärfe, die auch den besten Instrumenten anhaftete, wohl einfach hingenommen, doch halte ich es für wahrscheinlich, daß andere den Fehler mit der bekannten „Verzerrung“ der Polarisationsprismen (z. B. des gewöhnlichen Nicols) in Zusammenhang gebracht und sich dabei beruhigt haben. Die Verzerrung ist bekanntlich schön zu sehen, wenn man durch ein Nicol ein Fensterkreuz ansieht.

hat. Es ist sicher, daß ihre Entdeckung durch die Eigenart meiner Objekte und besonders durch die Beobachtung von Schleifstaub begünstigt wurde. Vielleicht ist die Tatsache schon öfters beobachtet, aber als bedeutungslos angesehen und nicht weiter verfolgt worden. Es ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung, zu zeigen, wie außerordentlich schwer der hier zugrunde liegende Fehler der Strahlenvereinigung im Polarisationsmikroskop ist und die Wege zu seiner Beseitigung zu suchen und zu diskutieren.

Zur genaueren Erklärung und Verfolgung des eigenartigen astigmatischen Phänomens habe ich mich erst des mühsamen und uneleganten, aber durch die Erfolge der deutschen Optik gerechtfertigten Mittels der trigonometrischen Durchrechnung einzelner Strahlen bedient, das auch sofort zu einer zahlenmäßigen und genauen Erklärung führte; dabei lag der Vergleich bzw. die Gegenüberstellung des Nicols mit einer isotropen Platte zugrunde, in welcher das verschiedene Schicksal der einzelnen Strahlen eines Büschels nur von der Verschiedenheit der Einfallswinkel abhängt, während der Verlauf in der doppeltbrechenden Platte keine reine Einfallswinkelerscheinung ist, sondern außerdem von der Variabilität des Brechungsindexes mit der Richtung mitbedingt wird, so daß erhellt, daß ein konvergentes Büschel in der Ebene der optischen Achse (wo der Brechungsindex verschieden ist) anders beeinflußt werden muß als in der dazu senkrechten Ebene senkrecht zur Achse, in der der Brechungsindex konstant ist. Später habe ich den Astigmatismus in seiner Abhängigkeit von der Lage der optischen Achse genauer verfolgt und seine Betrachtung auf schon bekannte Theorien der Kristalloptik zurückgeführt.

2. Vorläufige Orientierung über Art und Größe des astigmatischen Fehlers beim Tubus- und Okularaufsatzanalysator.

Der bei modernen Polarisationsmikroskopen meist gebräuchliche Tubusanalysator wird von konvergenten homo-

und das Nicol dabei um seine Achse dreht. Auch Tissot und Pellin werfen den Fehler noch mit der Verzeichnung zusammen. Astigmatismus und Verzerrung sind auch nahe verwandte Erscheinungen (vgl. p. 305 ff.), doch hat der Mangel einer scharfen Trennung bisher eine tiefere Einsicht offenbar aufgehoben und verhindert, daß das Problem des Astigmatismus in Fluß kam.

zentrischen Lichtbüscheln durchsetzt, die vom Objektiv ausgehen und oben noch vor ihrem Vereinigungspunkt von der Kollektorlinse des Okulars aufgenommen werden. Homozentrische (konvergente oder divergente) Büschel verlieren aber beim Durchgang durch ein Nicol ihren Brennpunkt; die genaue Strahlenvereinigung wird dadurch gestört, daß jeder einzelne Strahl eines Büschels eine verschiedene Parallelversetzung erfährt. Das führt zu einer eigenartigen Abweichung von dem ursprünglichen Schnittpunkt. Wir betrachten zunächst nur die Strahlen eines Büschels. Die, welche in einem Hauptschnitt und in einer dazu senkrechten Ebene verlaufen, werden, abgesehen von einer (der sphärischen verwandten) Aberration, wieder in je einem Punkte vereinigt, doch so, daß der Schnittpunkt der Hauptschnittstrahlen weiter vom Nicol entfernt liegt als der Konvergenzpunkt der Strahlen, die in der dazu senkrechten Ebene verlaufen. Stellen wir auf den Bildpunkt der Hauptschnittstrahlen ein, so werden die Strahlen der anderen Ebene hinter ihrem Schnittpunkt aufgefangen, also eine helle Linie in dieser Ebene erzeugen; umgekehrt erzeugen die Hauptschnittstrahlen eine dazu senkrechte Bildlinie, wenn wir auf den anderen Bildpunkt einstellen. Wir haben es also mit astigmatischen Büscheln zu tun; ein Blick auf Fig. 1, die ein solches Büschel mit seinen beiden Konvergenzpunkten und Brennlinien darstellt, wird die Sache vollkommen deutlich machen.

Durch die beiden erwähnten Linien gehen nun, wie vorausgreifend erwähnt sein mag, bei den einfachsten astigmatischen Büscheln (wie sie z. B. in der Achse Thompsonscher Prismen auftreten) annäherungsweise auch alle übrigen Strahlen eines Büschels; sie sammeln sich erst in der einen und später in der darauf senkrechten zweiten Brennlinie. Bei etwas komplizierteren astigmatischen Büscheln, wie sie in unserem Falle auch auftreten können, steht jedoch nur noch eine der beiden Brennlinien auf der Büschelachse senkrecht; die andere steht schief dazu, obwohl beide Brennlinien noch in zwei zueinander senkrechten Ebenen verlaufen. In Fig. 8 ist ein derartiges Büschel mit seinen beiden Brennlinien dargestellt. Es leuchtet ein, daß ein solches Büschel bei Einstellung auf einer zur Achse senkrechten Mattscheibe eine scharfe und eine unscharfe Lichtlinie ergeben muß.

Wie schon oben bemerkt, läßt sich dieser Astigmatismus besonders auffallend zeigen, wenn man im Dunkelfeld oder bei gekreuzten Nicols feinste Staubpartikelchen im Polarisationsmikroskop beobachtet. Durch Anwendung stärkerer Okulare wird die Erscheinung entsprechend vergrößert und besonders deutlich. Bei Verstellung des Okulars beobachtet man bei tieferer Einstellung (also näher am Nicol) eine in Richtung des Nicolhauptschnittes liegende Brennlinie und bei höherer Einstellung einen dazu senkrechten hellen Strich. Diese Erscheinung gibt — nebenbei bemerkt — ein bequemes

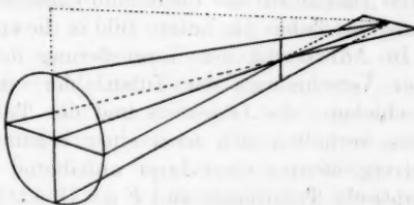


Fig. 1a.

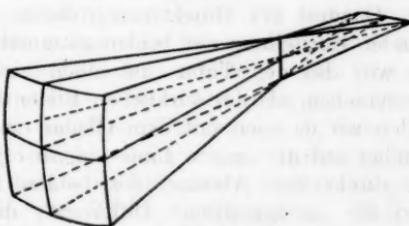


Fig. 1b.

Mittel an die Hand, um die Schwingungsrichtung eines Nicols zu bestimmen. Es braucht kaum noch bemerkt zu werden (vgl. Fig. 1), daß die Brennlinie in der Richtung des Hauptschnittes ihre größte Ausdehnung hat in der Schnittweite der Strahlen, die in einer zum Hauptschnitt senkrechten Ebene verlaufen und umgekehrt. Bei mittlerer Einstellung des Okulars erzeugen die Strahlen der erwähnten zwei Ebenen ein kleines astigmatisches Kreuz, das jedoch durch die Strahlen, welche nicht in einer der beiden betrachteten Hauptebenen eingeschlagen sind, zu einem Lichtfleck verbreitert wird.

Wenn alle Objektpunkte in einer Ebene liegen, so erscheinen ihre Bilder gleichzeitig verbreitert oder parallel

in einer Richtung ausgezogen; sind dagegen die Gegenstandsweiten der einzelnen Objektpunkte verschieden, so gilt daselbe von den Bildweiten, so daß ein Okular dabei gleichzeitig die (dem Hauptschnitt parallelen) unteren Bildlinien von Objektpunkten größerer Objektivnähe und die senkrecht dazu stehenden oberen Strichbilder entfernterer Punkte zeigt.

Statt das Okular zu senken, können wir auch den Tubus um eine Kleinigkeit herunterschrauben. Wir nähern uns dabei mit dem Objektiv dem Objektpunkt, so daß die beiden Bilder im Tubus umgekehrt mehr nach oben verschoben werden. War vorher das Okular auf das obere Bild eingestellt, so rückt bei der Senkung des Tubus das untere Bild in die entsprechende Höhe vor. In Anbetracht der Vergrößerung des Objektivs entspricht der Verschiebung der Tubusbilder eine sehr viel kleinere Verschiebung des Objektivs und des Tubus auf das Objekt zu; sie verhalten sich nach einer bekannten Formel für die Axialvergrößerung einer Linse annähernd wie $T^2 : F^2$, wenn T die optische Tubuslänge und F die Objektivbrennweite bedeutet. (Der Wert des Verhältnisses nähert sich für stärkere Systeme dem Quadrat der Objektivvergrößerung.) Bei aufeinanderfolgender Einstellung der beiden astigmatischen Bildlinien haben wir also den Tubus um einen viel geringeren Betrag zu verschieben, als der wirklichen Bildentfernung entspricht. Stellen wir dagegen mit dem Okular einmal auf die eine und nachher auf die andere Linie ein, so ergibt uns die Verschiebung direkt den Abstand der beiden Bilder eines Punktes, also die „astigmatische Differenz“, die in dieser Weise gemessen werden kann.

Die astigmatische Differenz stellt einen Grenzwert (ein Maximum!) dar, der bei engen Büscheln, wie sie im Mikroskop-tubus auftreten, nahezu erreicht wird. Der Abstand der Bildlinien ist auch für die divergenteren Strahlen eines weit geöffneten Büschels nur wenig vermindert (wogegen die Bildpaare der Strahlen von geringerer und stärkerer Divergenz erheblich gegeneinander verschoben sind). Bei einem Mikroskop, das mit einem Glan-Thompson'schen Prisma von 2,5 cm Länge ausgerüstet ist, beträgt die astigmatische Differenz über 3 mm (nach theoretischer Berechnung 3,309 mm).

Die Länge der strichförmigen Punktbilder hängt außer von der (als konstant angenommenen) astigmatischen Diffe-

renz (d) noch von der Öffnung des Büschels ab; Fig. 1 läßt (bei Beachtung der fein punktierten Linie) erkennen, daß die Strichlänge l dem doppelten Tangens des halben Öffnungswinkels proportional ist. Für ein axiales Büschel im Mikroskop-tubus verhält sich also $l : d$ wie der Durchmesser der hinteren Austrittspupille des Objektivs zu ihrem Abstand vom Objektivbild. Wenn wir an Stelle der Austrittspupille die hinterste Objektivlinse und deren Abstand betrachten, so können wir als Durchmesser für schwache Objektive einen Mittelwert von 1 em einsetzen. Der Abstand von der hinteren Bildebene schwankt bei den Objektiven der führenden Firmen etwa zwischen 14 und 18 cm, wobei die größeren Werte zu den starken Systemen gehören, so daß wir für die schwachen Objektive mit einem Mittelwert von 16,5 cm sicher nicht zu niedrig greifen. Wir erhalten also nach unserer Proportion $l : d = 1 : 16,5$ oder wenn wir für d den erwähnten Wert 3,3 mm einsetzen $l = 3,3/16,5 = 1/5$ mm. Bei einem schwächeren Objektiv beträgt die Länge der Brennlinien, in die jeder Bildpunkt ausgezogen wird, also etwa $1/5$ mm, was bei Betrachtung aus deutlicher Sehweite einem Sehwinkel von $180 \cdot 60/5 \cdot 250 \cdot \pi = 2,75$ Minuten entspricht. Dazu mag bemerkt werden, daß die Grenze der Sehschärfe bei 1' liegt. Bei Anwendung eines Arbeitsokulars von 4—8facher Vergrößerung wächst die Länge der Striche für deutliche Sehweite auf $4/5$ bzw. 1,6 mm und nimmt bei Gebrauch eines starken (etwa eines hohen Compensations-) Okulars von 12- oder 18facher Vergrößerung die enorme Größe von 2,4 bzw. 3,6 mm an. Man kann sich durch Anwendung eines starken Okulars leicht von der Richtigkeit dieser rechnerisch gefundenen Werte überzeugen.

Die Rechnung gilt für ein Nicol von 2,5 em Länge. Bei Mikroskopen mit kürzerem Tubusanalysator wird der Fehler entsprechend kleiner; er pflegt dann (wenigstens für schwächere Objektive) auch dadurch noch etwas weiter herabgesetzt zu werden, daß das zu kleine Nicol als (viereckige) Aperturbленde für periphere Teile der aus dem Objektiv austretenden Büschel wirkt. Ich habe mich indessen überzeugt, daß man bei den Instrumenten aller bekannten Firmen bei der Verwendung mittlerer Arbeitsokulare Strichbilder von ungefähr 1 mm Länge und bei Anwendung stärkster Okulare astigmatische Brennlinien von 2—3 mm erhält. Wenn die

Tubusnicks so groß gewählt würden, wie sie eigentlich sein sollten, d. h. breit genug, um in keinem Falle auch die schrägen Büschel, die vom Objektiv dem Okular zu laufen, einzuschränken, so würde der astigmatische Fehler wegen der entsprechenden Verlängerung des Nicols das Doppelte der angegebenen Werte erreichen.

Wenn man bedenkt, daß die astigmatische Störung in der geschilderten Stärke nicht etwa auf schiefe Büschel und auf die peripheren Bildteile beschränkt ist, wie beim Astigmatismus zentrierter Linsensysteme, sondern auch für ein axiales Büschel in der vollen Stärke vorhanden ist, so wird man zugeben, daß im Vergleich zu dem hohen Korrektionszustand fast aller übrigen modernen optischen Instrumente die Strahlenvereinigung im Polarisationsmikroskop in einem unerhört mangelhaften und unwürdig schlechtem Zustande gelassen worden ist.

Vielleicht wird es manchen wundernehmen, daß der geschilderte Fehler bei seiner Größe keine Beachtung erfahren hat, und man könnte deshalb zu der Ansicht neigen, daß der Mangel punktueller Abbildung zwar vorhanden sei und bei geeigneten Objekten, wie hellen Staubpartikelchen, im Dunkelfeld hervorträte, daß er sich aber gewöhnlich und zumal im Hellfeld nicht störend bemerkbar mache. Man braucht aber nur einmal ein und dasselbe Präparat unter Beachtung der Schärfe der Einzelheiten im Hellfeld zu betrachten und den Tubusanalysator dabei abwechselnd ein- und auszuschalten, um die (auch bei Änderung der Einstellung nicht verschwindende) starke Verschlechterung des Bildes deutlich wahrzunehmen. Am eklatantesten aber wirkt vielleicht folgender einfache Versuch. Man legt über das Tischloch eines Polarisationsmikroskopes ein gut korrigiertes, kurzbrennweitiges photographisches Objektiv — etwa ein Mikroplanar von Zeiss, ein Mikrosummar von Leitz oder ein Mikroluminar von Winkel —, schaltet Polarisator und Beleuchtungsapparat aus und entwirft unter Vermittelung des Planspiegels mit dem photographischen Objektiv ein Bild einer dürren Baumkrone, eines Trägers von Telegraphenglocken oder dgl. Dies Bild wird so durch das Mikroskop (mit schwachem Objektiv und mittelstarkem bis starkem Okular) betrachtet. Das leidlich scharfe Bild wird dann durch Einschaltung des Tubusanalysators so enorm

verschlechtert, daß wohl jeder ein photographisches Objektiv mit gleicher Unschärfe zurückweisen würde (vgl. Fig. 1—4, Taf. III).

Es wurde oben schon betont, daß die Länge der astigmatischen Strichbilder bei Anwendung der Okulare entsprechend deren Eigenvergrößerung vergrößert wird; umgekehrt ist klar, daß stärkere Objektive den Fehler nicht in verstärktem Maße zeigen. Sie lassen ihn sogar trotz der gleichbleibenden Größe der astigmatischen Differenz weniger hervortreten, weil sie kleinere Austrittspupillen haben und diese etwas weiter von der Bildebene entfernt liegen. Die Elementarbüsche im Tubus werden also etwas enger; außerdem kommt in Betracht, daß die Lichtstärke geringer ist und daß zumal die peripheren Strahlen der Büschel durch die starken Reflexionsanteile beim Durchgang unter hohen Einfallswinkeln geschwächt sind. Natürlich bleibt der Fehler auch bei starken Systemen trotzdem noch sehr deutlich wahrnehmbar.

Bei mittleren Objektiven, deren hinterste Linse noch einen Durchmesser von 7—9 mm zu haben pflegt, ist der Fehler dementsprechend fast ebenso stark wie bei den oben betrachteten schwachen Objektiven; er fällt sogar vielleicht noch mehr auf, weil man bei Anwendung der stärkeren Objektive gewöhnlich mehr auf Einzelheiten achtet. Wenn bei schwachen Objektiven der kleine Nicolquerschnitt als Blende wirkte und das axiale Büschel aus einem mittleren Objektiv diese Blende auch noch füllt, so bleibt die Länge der Brennlinien natürlich bei Anwendung beider Systeme genau gleich.

Für den Okularaufsatzanalysator ist der Astigmatismus nur von sehr untergeordneter Bedeutung und kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden, obwohl die astigmatische Differenz — gleiche Länge der Nicols vorausgesetzt — dieselbe ist wie beim Tubusanalysator. Aber die Öffnung der aus dem Okular divergent austretenden und das Nicol durchsetzenden Büschel ist viel kleiner; sie wird durch den Durchmesser der Okularaustrittspupille und die deutliche Sehweite bestimmt, so daß sie bei stärkeren Okularen noch geringer wird. Das bewirkt dann eine entsprechende Verkürzung der Brennlinien. Bei den Huygensschen Okularen 1 von Zeiss, 1 und 3 von Leitz, sind die Austrittspupillen ungefähr 3,5 bzw. 2,5 und 2 mm, die zugehörige Länge der astigmatischen Bildstriche in deutlicher Sehweite (25 cm) würde 0,0462 bzw.

0,033 oder endlich 0,0264 mm betragen. Schon die größte dieser Strichlinien würde aus der Entfernung von 25 cm unserem Auge unter einem Sehwinkel von nur 0,636 Minuten erscheinen, d. h. die Abweichung von der Punktform des Bildes würde gerade unter der Sichtbarkeitsgrenze liegen. Bei starker Nahakkommodation, etwa auf 12,5 cm, müßte der Fehler für ein gutes Auge eben sichtbar werden. Wahrscheinlich akkommodiert man aber bei Beobachtung durch den Tubusanalysator der Schärfe zuliebe unwillkürlich auf größere Entfernung, und es ist klar, daß dabei die Öffnung der Büschel und die Länge der Brennlinien noch geringer wird, bis schließlich bei Akkommodation auf unendlich der Fehler nicht nur für unser Auge, sondern auch in Wirklichkeit vollkommen verschwinden muß.

Bei der Herstellung von Photographien unter Benutzung des Okularanalysators kann der astigmatische Fehler unter Umständen merklich werden, nämlich dann, wenn man eine Bildweite (Kameraauszug) von weniger als 16 cm wählt. Wenigstens kann man bei weiterer Verkürzung des Auszuges mit einer Einstellupe die Schärfenabnahme feststellen.

Wenn der astigmatische Fehler schon an sich beim Aufsatzanalysator geringfügiger ist als beim Tubusanalysator, so wird der Vergleich für den letzteren dadurch vollends ungünstig, daß der Fehler des letzteren noch eine erhebliche Vergrößerung durch das Okular erfährt, die für den ersteren fortfällt. Leider steht einer vollständigen Rehabilitation des sehr außer Gebrauch gekommenen Aufsatzanalysators auf Grund des geschilderten Vorzuges sein schwerer Fehler entgegen, daß er das Gesichtsfeld einschränkt. Diese Einschränkung kommt dadurch zustande, daß er das Auge hindert, nahe genug an die Austrittspupille des Okulars heranzukommen, so daß man das Gesichtsfeld nicht auf einmal überblicken kann, sondern Kopfbewegungen zu Hilfe nehmen muß.¹⁾

Dazu kommt, daß es an sich praktischer erscheint, den Analysator, der je nach dem gewählten Nicoltypus ein Ge-

1) Um die Einschränkung des Gesichtsfeldes beim Okularaufsatzanalysator zu umgehen, hat die Firma Leitz neuerdings über dem Nicol eine schwache Sammellinse angebracht. Es sei dazu bemerkt, daß die bei Akkommodation auf unendlich parallelstrahligen Büschel dabei das Nicol als divergierende Büschel durchsetzt haben müssen, so daß diese Aufsatzanalysatoren nicht ganz frei von Astigmatismus sein können.

sichtsfeld von mehr oder weniger eingeschränkter Winkel- ausdehnung besitzt, an einer Stelle in den Strahlengang einzuschalten, an der die den verschiedenen Objektpunkten zugeordneten Büschel untereinander eine geringe Divergenz besitzen. Das ist im Tubus zwischen Objektiv und Okular der Fall, während umgekehrt die aus dem Okular austretenden Büschel beträchtliche Neigungen gegeneinander aufweisen. Auch die Auszerrung der peripheren Bildteile wird größer, wenn man den Analysator in den weit geöffneten Lichtkegel des Okulars einschaltet, wogegen allerdings die relative Verzerrung in den beiden Hauptebenen kleiner wird, als wenn man bei der geringen Divergenz der verschiedenen Büschel im Tubus den Verzerrungsfehler klein entstehen läßt und ihn durch das Okular vergrößert.

Endlich ist zu berücksichtigen, daß die Polarisationsrichtung divergierender Strahlen, die ein Nicol durchsetzt haben, nicht parallel sind, sondern wie die Meridianelemente eines auf die optische Achse bezogenen Kugelgradnetzes Richtungsverschiedenheiten zeigen, die mit der Divergenz der Strahlen zunehmen, also für den Gesamtstrahlkegel, der durch den Aufsatzanalysator geht, sehr groß sein muß. Dagegen ist der Unterschied der Schwingungsrichtungen, der im Tubus-nicol entsteht, nur gering, und dieser Unterschied wird bei der Steigerung der Divergenz im Okular nicht mitvergrößert. Bekanntlich hat die Divergenz der Polarisationsrichtungen Unvollkommenheit der Auslöschung, Auftreten hellerer und dunklerer Stellen im Gesichtsfeld (Landoltscher Streifen) zur Folge; ein Fehler, der demnach bei der Verwendung des Okularanalysators erheblich größer sein muß.

Die angeführten Momente sichern dem Tubusanalysator seine Überlegenheit, und so wird es wahrscheinlich trotz des Astigmatismus betreffs der Verwendung von Tubus- bzw. Aufsatzanalysator so bleiben, wie es Rinne (1912, p. 95)¹⁾ mit den Worten ausdrückt: „Letzterer wird nur in gewissen Fällen gebraucht, für gewöhnlich ersterer“.

Daraus ergibt sich aber die Notwendigkeit, den Astigmatismus des Tubusnicols zu beseitigen.

1) F. Rinne, Elementare Anleitung zu kristallographisch-optischen Untersuchungen vornehmlich mit Hilfe des Polarisationsmikroskops. Leipzig 1912.

3. Erklärung und exakte geometrische Darstellung der astigmatischen Störung auf Grund trigonometrischer Durchrechnung eines weit geöffneten axialen Büschels bei einem Thompsonschen Nicol. Kaustische Störungen durch sphärische Aberration.

Die Erklärung der astigmatischen Störung des Strahlenverlaufes wurde schon oben angedeutet; sie beruht darauf, daß die Strahlenfläche der im Nicol ja allein durchtretenden extraordinären Strahlen keine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid ist, also außer an seinen Polen eine verschiedene Krümmung in verschiedenen Richtungen aufweist. Da man aber nach der Huygensschen Konstruktion immer die Tangente an die Strahlenfläche benutzt, so ist ohne weiteres klar, daß die verschiedene Krümmung der letzteren in verschiedenen Richtungen auch für die unter sonst gleichen Winkeln einfallenden Strahlen verschiedene Brechungswinkel ergeben muß. Damit ergibt sich aber schon auch eine verschiedene (parallele) Strahlenversetzung beim Durchgang des Büschels durch eine planparallele Platte; denn die Parallelversetzung in horizontaler Richtung (h) ist —

unbekümmert um die spezielle Form
ganz gleich, während die vertikale Versetzung v —

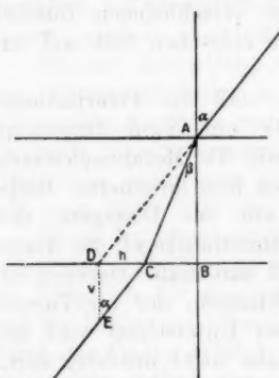


Fig. 2.

des Brechungsgesetzes — nach unserer Figur $h = D(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$, wenn D die Plattendicke, α den Einfalls- und β - den Brechungswinkel bedeuten. Daraus ergibt sich für die zugehörige Vertikalverschiebung senkrecht zur Platte: $v = D(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)/\operatorname{tg} \alpha$ oder $v = D(1 - \operatorname{tg} \beta/\operatorname{tg} \alpha)$.

Wie man sieht ist v vom Einfallswinkel abhängig und für die verschiedenen Strahlen eines homozentrischen Büschels nicht gleich, so daß sich schon beim Durchgang durch isotrope Platten eine vom Einfallswinkel abhängige (sphärische) Störung des homozentrischen Verlaufes ergibt, die z. B. bei verschiedenen Deckgläsern schon merklich verschiedene Werte besitzt und die bekannte Deckglaskorrektion notwendig macht.

Sucht man nun β für eine doppeltbrechende Platte konstruktiv oder rechnerisch unter Beachtung der Richtung der

optischen Achse zur Plattenebene, so findet man, daß die Gesamtheit der Strahlen überhaupt keine Ansammlung in einem Brennpunkt erfährt, sondern daß die Strahlen im allgemeinen gegeneinander windschiefen Verlauf nehmen und dabei zwei Brennlinien passieren, daß aber in den sich in der Büschelachse schneidenden Hauptkrümmungsebenen die darin verlaufenden Strahlen je einen (auf der einen bzw. anderen Brennlinie gelegenen) Brennpunkt bzw. bei Berücksichtigung größerer Büschelöffnungen je eine Kaustik in verschieden weitem Abstand von der Platte erzeugen.

Wir nehmen als einfachstes und gleichzeitig wichtigstes Beispiel ein Thompsonsches Prisma mit senkrecht zur Längsachse geschliffenen Endflächen. Bei dieser Form des Nicols liegt die optische Achse des verwendeten Kalkspats senkrecht zur Längsachse, also parallel zu den Endflächen. Damit steht in Zusammenhang, daß senkrecht einfallende Strahlen bei diesem Prisma überhaupt keine Brechung und seitliche Versetzung erfahren — ein Umstand, dem dieser Nicoltyp seine Bevorzugung als Analysator verdankt. Betrachten wir ein senkrecht einfallendes Büschel, so sind die beiden Hauptkrümmungsebenen durch einen (meridionalen, die optische und) die Längsachse enthaltenden Hauptschnitt und durch die Äquatorebene des Rotationsellipsoides gegeben. Es ist leicht einzusehen, daß die in diesen beiden Ebenen einfallenden Strahlen auch nach der Brechung in diesen Ebenen bleiben. In der Äquatorebene ist die Schnittlinie der Strahlenfläche ein Kreis, so daß die Berechnung von β nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz:

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

erfolgen kann, wobei wir für n den Wert ε , d. h. das Minimum des extraordinären Brechungsexponenten einzusetzen haben, das für den Kalkspat bekanntlich 1,48639 beträgt.

In der anderen Hauptkrümmungsebene ist der Schnitt der Strahlenfläche eine Ellipse mit den Achsen $a = 1/\varepsilon$ und

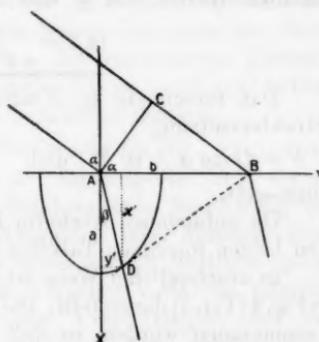


Fig. 3.

$b = 1/\omega$, wenn ω das Maximum des extraordinären oder den ordinären Brechungsexponenten bedeutet. In die Ebene dieser Ellipse ist die vorstehende Konstruktion des gebrochenen Strahles (AD) zu deuten, nach welcher $\operatorname{tg} \beta = y'/x'$. y' und x' lassen sich mit Hilfe der Tangentengleichungen von BD bestimmen. Der Maßstab der Figur sei so gewählt, daß $CB = 1$; dann ist $AB = 1/\sin \alpha$, das ist aber gleichzeitig die Ordinate von Punkt B , dessen Abszisse = 0 ist. Diese Koordinaten von B müssen der Tangentengleichung von BD :

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1$$

genügen.

Es ergibt sich aber durch Einsetzen:

$$\frac{y'}{b^2 \cdot \sin \alpha} = 1,$$

also

$$y' = b^2 \sin \alpha.$$

Den zugehörigen Wert für x' ergibt uns dann die Ellipsengleichung beim Einsetzen des gefundenen Wertes für y' :

$$\frac{x^2}{a^2} + b^2 \cdot \sin^2 \alpha = 1,$$

also

$$x' = a \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Für $\operatorname{tg} \beta$ ergibt sich dann schließlich aus den jetzt bekannten Werten von y' und x' :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b^2 \sin \alpha}{a \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Das errechnete $\operatorname{tg} \beta$ wird dann in die Formeln für die Strahlversetzung

$h = D(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$ und $v = h/\operatorname{tg} \alpha = D(1 - \operatorname{tg} \beta/\operatorname{tg} \alpha)$ eingesetzt.

Die gefundenen Werte für $D = 1$ und für $D = 2,5$ cm sind in den beiden folgenden Tabellen eingetragen (vgl. p. 302 u. 303).

In anschaulicher Weise ist das Ergebnis der Durchrechnung in Fig. 4 (Taf. I) dargestellt. Die Länge des Nicols ist hier zu 7,5 cm angenommen worden, so daß die in der Tabelle enthaltenen Werte in der Figur entsprechend größer auftreten. Die Breite ist auch relativ übertrieben, um auch schrägere Strahlen des Büschels bis zu 45° Neigung verfolgen zu können. Daß so

schräg verlaufende Strahlen niemals in dem engeren Gesichtsfeldkegel eines Nicols möglich sind, ist selbstverständlich, doch ist es für das Verständnis der Aberrationen vorteilhaft, von der Betrachtung eines weiter geöffneten Büschels auszugehen und ein Nicol dementsprechend einmal als eine seitlich nicht eng begrenzte planparallele Platte zu betrachten. In der Figur sind die Strahlen von 5 zu 5° Abstand auf Grund der errechneten Horizontal- und Vertikalverschiebungen eingetragen und verfolgt, und zwar sind in der rechten Hälfte der Figur die Strahlen der äquatorialen, links die der axialen (meridionalen) Hauptkrümmungsebene gezeichnet. Man hat sich also die rechte bzw. linke Hälfte der Figur um 90° aufgeklappt zu denken. Die Figur zeigt uns ohne weiteres die oben erwähnte astigmatische Differenz der Brennpunkte achsenbenachbarter Strahlen, sie beträgt hier bei einer Nicollänge von 7,5 cm 9,921 mm, also etwa 3 mal den oben für die Länge von 2,5 cm benutzten Betrag. Die vorliegende Rechnung ergibt 8,307 statt des oben eingesetzten Wertes 8,309, weil die Differenz hier für einen Strahl von einer Abweichung von 5° ausgerechnet wurde, während oben der Grenzwert für einen der Achse unendlich benachbarten Wert gegeben wurde.

Unsere Figur zeigt, daß genau genommen in keiner der beiden Ebenen ein wirklicher Brennpunkt aller Strahlen zu stande kommt, vielmehr schließt sich an den Brennpunkt der achsenbenachbartesten Strahlen eine durch die Strahlen größerer Öffnung gebildete Kaustik an. Wenn die Einstellungsebene des Okulars zwischen oder hinter den beiden Brennpunkten liegt, so kann sich (je nach der Öffnung der verwendeten Büschel) die Kaustik in der einen oder anderen Ebene durch zwei hellere Lichtpunkte auf der Brennlinie bemerkbar machen.

Die Kaustiken der beiden Ebenen sind für ein Thompsonsches Prisma nicht genau gleich. Diejenige der Äquatorialebene, in der der Schnitt der Strahlenfläche kreisförmig ist, weist ganz den Charakter der Aberration eines Büschels beim senkrechten Durchgang durch eine optisch isotrope planparallele Platte auf. Sie ist nur von einer Variabeln, nämlich vom Einfallswinkel, abhängig und kann insofern mit der sphärischen Aberration eines parallelen Strahlenbündels an einer Kugelfläche verglichen werden. Dagegen stellt die Kaustik der Meridionalebene (oder des Hauptschnittes), in der die

Horizontal

| | $\alpha =$ | 5° | 10° | 15° | 20° |
|-------------------|--|-----------|---------|---------|---------|
| Axial-ebene | $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$ | 0,040324 | 0,08197 | 0,12634 | 0,17508 |
| | h für $D = 2,5$ | 0,100810 | 0,20493 | 0,31585 | 0,43770 |
| Äqua-torial-ebene | $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$ | 0,0287506 | 0,05870 | 0,09112 | 0,12753 |
| | h für $D = 2,5$ | 0,07188 | 0,14675 | 0,2278 | 0,31888 |

Vertikal

| | $\alpha =$ | 5° | 10° | 15° | 20° |
|---------------------|---|-----------------------|---------|---------|---------|
| Axial-ebene | $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$ | 0,4609 | 0,46487 | 0,47151 | 0,48102 |
| | V für $D = 2,5$ | 1,15230 | 1,16218 | 1,17878 | 1,20255 |
| Äqua-torial-ebene | $1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$ | 0,32862 ¹⁾ | 0,33291 | 0,34006 | 0,35038 |
| | V für $D = 2,5$ | 0,82155 | 0,83228 | 0,85015 | 0,87595 |
| Astigmat. Differenz | für $D = 1$ | 0,13228 | 0,13196 | 0,13145 | 0,13064 |
| | für $D = 2,5$ | 0,33070 | 0,32990 | 0,32863 | 0,32660 |

Schnittlinie der Strahlenfläche eine Ellipse ist, keine reine Einfallswinkelerscheinung dar, sondern ist gleichzeitig noch abhängig von der Verschiedenheit, mit der sich die Strahlenfläche von verschiedenen Seiten für die die Strahlenfront bestimmende Tangente darbietet. Unsere Figur lässt die Verschiedenheit der Kaustiken erkennen; im Mikroskopibus, in dem nur Büschel von ungefähr 6° Öffnung auftreten, wird der Unterschied allerdings gering, wie denn dabei überhaupt die sphärische Aberration ziemlich unbedeutend wird.

Eine gute Vorstellung von der Geringfügigkeit der durch ein Nicol im Tubus bewirkten Aberration gibt ein Vergleich mit der durch ein Deckglas bewirkten Differenz der Schnittweiten.²⁾

1) Der Grenzwert ist: 0,32723.

2) Strahlen, die der Achse unendlich benachbart sind, erfahren durch Einschaltung einer Platte von der Dicke D eine Verschiebung ihres

verschiebung.

| | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0,23012 | | 0,29895 | 0,36985 | 0,46227 | 0,57754 |
| | 0,57530 | 0,73488 | 0,92463 | 1,15568 | 1,4439 |
| 0,16975 | | 0,22014 | 0,28192 | 0,35982 | 0,459233 |
| | 0,42438 | 0,55035 | 0,70680 | 0,89955 | 1,14808 |

verschiebung.

| | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0,49349 | | 0,50914 | 0,52819 | 0,55092 | 0,57754 |
| | 1,23373 | 1,27285 | 1,32048 | 1,3773 | 1,44385 |
| 0,36403 | | 0,38129 | 0,40263 | 0,42882 | 0,459233 |
| | 0,91008 | 0,95323 | 1,00658 | 1,07205 | 1,14808 |
| 0,12946 | | 0,12785 | 0,12556 | 0,12210 | 0,11831 |
| | 0,32365 | 0,31963 | 0,3139 | 0,30525 | 0,29578 |

Konvergenzpunktes um $V = D(1 - 1/n)$; dagegen wird der Vereinigungs-
punkt von Strahlen der Neigung α um $V' = D(1 - \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha)$ verschoben.
Die Differenz der Schnittweiten beträgt also: $D(1/n - \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha)$. Die
Neigung, d. h. die halbe Öffnung eines Büschels, beträgt im Tubus selten
mehr als 2° , im Deckglas jedoch bei einem starken Trockensystem etwa
 35° (bei einem Objektiv mit der numerischen Apertur 0,85 und einem
Deckglas vom Brechungsindex 1,52 genau $34^\circ 0' 2''$). Unsere Formel
ergibt für diese Winkel (2 bzw. 35°) bei Einschaltung einer Platte von
der Dicke 1 und dem Brechungsindex 1,52 Schnittweitendifferenzen von
0,00021 bzw. 0,07596, also bei Verwendung der Platte als Deckglas einen
361,714 mal größeren Betrag. Setzt man im ersteren, auf den Tubus be-
züglichen Fall nicht 1,52, sondern den senkrecht zum Hauptsnitt für
ein Nicol gültigen Brechungsindex des extraordinaire Strahles ein, so
erhält man die noch kleinere Schnittweitendifferenz von 0,0002, also
relativ zum Deckglas eine 379,8 mal schwächere Wirkung. Bedenken
wir nun, daß einerseits der durch ein Deckglas bewirkte Fehler bei einer
Objektivvergrößerung von 50:1 eine etwa 2500fache Axialvergrößerung
erfährt, und andererseits, daß ein Nicol von 25 mm Länge 2500 mal dicker

Unsere Figur und die Tabelle für die Vertikalverschiebungen läßt erkennen, daß diese Versetzungen mit dem Öffnungswinkel zunehmen. Die Zunahme ist aber in der Äquatorialebene der Strahlenfläche, in der reguläre Brechung stattfindet, stärker als im Hauptschnitt, so daß der Schnittpunktsabstand korrespondierender Strahlen auf der Achse abnimmt. Dieser Abstand, die astigmatische Differenz, ist z. B. für Strahlen von 45° Neigung $= 0,57754 - 0,459233 = 0,11831$; für 5° Neigung dagegen $= 0,46090 - 0,32862 = 0,13228$ und endlich für der Achse unendlich benachbarte Strahlen (wie sich aus einer späteren Rechnung ergeben wird) $= 0,45959 - 0,32723 = 0,13236$, alles gerechnet für ein Thompsonsches Nicol von der Länge 1. Die astigmatische Differenz bildet also für unendlich enge Büschel einen Grenzwert.

Die eigentümliche Abnahme der astigmatischen Differenz mit steigender Öffnung hängt, wie bemerkt, mit dem ungleichen Wachstum der Vertikalversetzungen in den beiden Hauptebenen zusammen, oder, wie wir auch sagen können, mit der Verschiedenheit der Aberrationen von den Brennpunkten der achsenbenachbarten Strahlen in den beiden Ebenen. Dieser Abstand der Schnittweite geneigter Strahlen vom Brennpunkt achsenbenachbarer Strahlen, die uns das Maß für die Aberration angibt, beträgt für 5° $0,46090 - 0,45959 = 0,00131$ im Hauptschnitt und $0,32862 - 0,32723 = 0,00139$ in der Äquatorialebene, und für 45° $0,57754 - 0,45959 = 0,11795$ in der Meridionalebene und $0,459233 - 0,32723 = 0,132003$ senkrecht dazu. Diese Zahlen, die wir später noch einmal brauchen werden, illustrieren den verschiedenen Charakter der Aberrationen auf der Achse in den beiden Ebenen mit hinreichender Deutlichkeit.

ist als 0,01 mm, also als diejenige Dicke, die nach der Skala der Objektivkorrektionsfassungen noch korrekturbedürftig ist, so ergibt sich, daß auch unter Anrechnung der größeren Dicke des Nicols im Tubus und der Objektivvergrößerung die Aberrationswirkung des Nicols im Tubus nur den 379,8ten Teil einer kaum merkbaren Deckglasverschiedenheit ausmacht.

Selbst wenn man nicht die Aberrationen selbst, sondern nur die Verschiebung des Konvergenzpunktes für unendlich achsenbenachbarte Strahlen betrachtet, die an sich über und unter dem Objektiv gleich ist, so ergibt sich, daß das 2500 mal dickere Nicol nur etwa ebenso stark verschiebend wirkt wie eine Änderung der Deckglasdicke von 0,01 mm, deren Einfluß entsprechend vergrößert wird.

Vergleichen wir die in den einzelnen Ebenen vorliegenden Strahlenstörungen mit den sphärischen Aberrationen auf der Achse, wie sie bei zentrierten Linsensystemen vorkommen und dort als Über- oder Unterkorrektion bezeichnet werden, so ist zu beachten, daß in unserem Falle die Strahlen größerer Öffnung weiter ab vom Nicol zusammentreffen als die Strahlen geringerer Neigung, d. h. die Störung des homozentrischen Verlaufs wäre in unserem Falle als Überkorrektion zu bezeichnen. Wir können also unser obiges Resultat auch kurz mit den Worten ausdrücken: der Strahlenverlauf ist in den beiden Hauptebenen verschiedenartig und verschiedengradig überkorrigiert.

**4. Über die Beziehung von Astigmatismus und Bildverzerrung.
Vorläufige Orientierung an einem Thompsonschen Nicol.**

Während der Astigmatismus des Nicols eine kaum beachtete Erscheinung darstellt, ist die bei der Beobachtung durch Polarisationsprismen auftretende Bildverzerrung allgemein bekannt. Man braucht nur einmal durch ein Nicol ein Fensterkreuz zu betrachten und dann den Polarisor zu drehen, um wahrzunehmen, daß das Bild des Kreuzes nicht fest und gleich bleibt, sondern sich in seinen Einzelheiten gegeneinander verschiebt, wobei dann die geraden Arme des Kreuzes eigentümliche Krümmungen erfahren. Bei Anwendung eines gewöhnlichen Nicols mit schrägen Endflächen wird die Erscheinung besonders auffallend, weil dabei auch der in Richtung der Nicolachse anvisierte Punkt bei der Drehung nicht ruhen bleibt, sondern eine kreisende Bewegung ausführt.

Das allgemeine Bekanntsein dieser bildverzerrenden Wirkung des Nicols legt den Gedanken nahe, daß auch der Astigmatismus wahrscheinlich öfters beobachtet worden ist, daß diese Störung aber ohne weiteres als Teilerscheinung der Bildverzerrung angesehen wurde. Diese Ansicht ist jedoch falsch oder wenigstens nur in einem sehr bedingten Sinne richtig. Um hier klar zu sehen, bedarf es einer Überlegung der Beziehungen von Astigmatismus und Bildverzerrung.

Zunächst ist festzustellen, daß der Astigmatismus und die Bildverzerrung in ihrem Grad einander nicht parallel laufen. Der Astigmatismus kann verschwinden, wenn die Verzerrung noch deutlich vorhanden ist. Dieses Verhältnis liegt z. B. vor

bei der Betrachtung eines (etwas entfernten) Gegenstandes, etwa des Fensterkreuzes durch ein Nicol. Jeder einzelne Punkt erscheint dabei vollkommen scharf und frei von Astigmatismus, während die Verzerrung des ganzen Bildes eine eklatante ist.

Andererseits ist zuzugeben, daß sowohl der Astigmatismus als auch die Bildverzerrung auf einer Strahlenstörung gleicher Art beruhen. Die Polarisationsprismen stellen alle planparallele Platten dar, und da nach Durchsetzung solcher Platten (auch wenn sie doppeltbrechend sind) jeder Strahl parallel zu seiner Eintrittsrichtung weiterläuft, so kann die ganze Störung des Strahlenverlaufs — mag sie sich nun als Astigmatismus oder Bildverzerrung äußern — immer nur auf der verschiedenen Parallelversetzung der einzelnen Strahlen beruhen, auf die wir den Astigmatismus schon zurückführen könnten. In beiden dioptrischen Fehlern handelt es sich gleicherweise um die Derangierung eines Strahlenbündels durch verschiedene Parallelversetzung der Einzelstrahlen. Der Unterschied liegt nur darin, daß wir die Wirkung der Derangierung an zwei verschiedenen Stellen ins Auge fassen. Beim Astigmatismus untersuchen wir die Wirkung, wie sie sich an der engsten Stelle des Strahlenbüschels als Störung der brennpunktmäßigen homozentrischen Vereinigung darstellt, bei der Verzerrung dagegen betrachten wir eine Projektion des Strahlenbüschels auf eine Ebene senkrecht zur Achse in mehr oder weniger großer Entfernung vom Konvergenzpunkt und konstatieren dort die Abweichung des Strahlendurchgangs nach Einschaltung eines Nicols. Daraus ergibt sich schon, daß die oben für ein Thompsonsches Prisma errechneten „Horizontalverschiebungen“, für die Bildverzerrung in derselben Weise maßgebend sein müssen wie die „Vertikalverschiebungen“ das für den Astigmatismus sind. Damit ist der Ausgangspunkt für eine exakte rechnerische Behandlung der Verzerrung gegeben, die nachher noch etwas verfolgt werden soll.

Die Horizontalverschiebung ist für jeden Strahl von bestimmter Neigung bei gleicher Stellung desselben Nicols konstant, sie ändert sich nicht mit der Entfernung der Projektionsebene vom Nicol oder vom Konvergenzpunkt des Büschels. Daraus geht hervor, daß die relative Größe der Verzerrung, d. h. der Horizontalversetzung zur Projektion des Büschels verschieden ist, und zwar um so kleiner, je größer der Abstand

vom ursprünglichen Projektionszentrum, denn die Projektion des Büschels in der Ebene senkrecht zu seiner Achse wächst proportional zu jenem Abstand.

Soviel einstweilen über das allgemeine Verhältnis von Astigmatismus und Verzerrung bei demselben Büschel, die hier in der strengen Abhängigkeit von Axial- und Lateral-aberration stehen. Wenn diese Abhängigkeit bei dem Astigmatismus und der Verzerrung, die wir etwa im mikroskopischen Bild nebeneinander wahrnehmen, aufgehoben ist, so liegt das daran, daß dabei überhaupt nicht die Störungen bei einem und demselben, sondern bei ganz verschiedenen Büscheln in Betracht kommen. Das in der Brennebene des Okulars gelegene Bildfeld des Objektivs stellt uns die Projektion eines einzigen großen Büschels dar, dessen Spitze von der Mitte der Objektivaustrittspupille gebildet wird; umgekehrt aber finden wir in den verschiedenen Punkten jenes Bildfeldes die Spitzen der verschiedenen Büschel, die mit ihrem breiteren Ende von der Objektivaustrittspupille ausgehen. Wir müssen zwischen projizierenden und zeichnenden oder punktierenden Büscheln unterscheiden. Erstere ergeben das Gesichtsfeld, dessen einzelne Punkte durch die letzteren gezeichnet werden. Die Axialstrahlen der punktierenden Büschel bilden die Strahlen des projizierenden Büschels, das beim Mikroskop eine erheblich größere Öffnung besitzt als die zeichnenden Büschel. Beim Durchgang durch ein Nicol werden nun sowohl die punktierenden Büschel als auch das projizierende Büschel derangiert, und die Störung kann auch bei jedem im Schnittpunkt als Astigmatismus und abseits vom Schnittpunkt als Verzerrung im Feld des Büschels konstatiert werden. So könnte man auch den Astigmatismus bei dem projizierenden Büschel feststellen, wenn man seine Strahlen nach dem Passieren des Nicols nach hinten verlängerte, und andererseits ließe sich die Verzerrung bei den

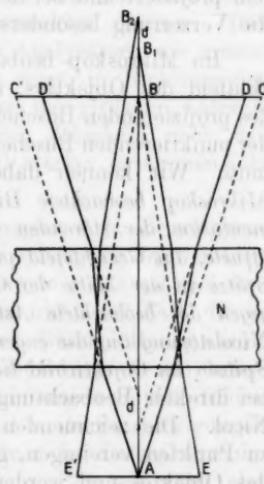


Fig. 5.

zeichnenden Büscheln beobachten, wenn man sie vor oder hinter ihrem engsten Punkte auffangen würde. Allerdings würde sich bei den zeichnenden Büscheln die Verzerrung ohne weiteres nur an der Deformierung des Umrisses erkennen lassen, denn das projizierte Feld eines punktierenden Büschels ist wegen der Gleichartigkeit der einzelnen (alle von einem Objektivpunkt ausgehenden) Strahlen hell oder gefärbt, so daß sich Verschiebungen im Innern schlechter erkennen lassen als bei dem großen Büschel, das im Mikroskop das Gesichtsfeld projiziert und bei der Verschiedenartigkeit seiner Strahlen die Verzerrung besonders leicht verrät.

Im Mikroskop beobachten wir nun mit dem Okular das Bildfeld des Objektivs, also eine Ebene, in der die Störung des projizierenden Büschels als Verzerrung und die Derangierung der punktierenden Büschel als Astigmatismus bemerkbar werden muß. Wir können daher zusammenfassend sagen: *Die im Mikroskop beobachtete Bildverzerrung stellt die laterale Dokumentation der störenden Wirkung des Nicol auf das weit geöffnete, das Gesichtsfeld projizierende Strahlenbüschel dar, dessen Spitze in der Mitte der Objektivaustrittspupille gegeben ist, wogegen der beobachtete Astigmatismus die axiale Äußerung der Nicolstörung auf die engeren zeichnenden Büschel darstellt, deren Spitzen im Objektivbild liegen.* Ähnlich liegen die Verhältnisse bei direkter Beobachtung etwa eines Fensterkreuzes durch ein Nicol. Die zeichnenden Büschel, die sich auf der Netzhaut zu Punkten vereinigen, gehen aus von den einzelnen Punkten des Objektes und werden begrenzt durch die Pupille unseres Auges, sie sind daher so eng, daß der Astigmatismus nicht hervortritt. (Die astigmatische Differenz ist als Grenzwert bei direkter Beobachtung durch ein Nicol von 2,5 cm Länge natürlich auch 3,309 mm; diese Differenz besteht aber an der Spitze des rückwärts verlängerten deformierten Büschels, also in so großer Entfernung, daß sie in Anbetracht der enormen axialen Verkleinerung im Auge gar nicht mehr in Betracht kommen kann.) Umgekehrt ist das projizierende Büschel in diesem Falle nur durch die Gesichtsfeldöffnung des Nicols begrenzt, also bedeutend, so daß die Gesichtsfeldverzerrung recht beträchtlich werden muß.

Beim Studium der Brennpunktsabweichung erwies es sich als praktisch, statt der Vertikal-(Axial)versetzungen die

Differenz dieser Verschiebungen im Hauptschnitt und der dazu senkrechten Ebene zu benutzen. In entsprechender Weise können wir auch bei der Betrachtung der Bildverzerrung an Stelle der absoluten Horizontalverschiebungen deren Differenz in jenen beiden Hauptebenen ins Auge fassen. Die absoluten Beträge der Lateralverschiebungen würden uns nur dann direkt sichtbar werden, wenn wir das mikroskopische Bild vor und nach Einschaltung des Tubusanalysators vergleichen. Dagegen werden sich die Differenzen der Lateralverschiebungen beim bloßen Drehen des Analysators um 90° als Einwärts- oder Auswärtsbewegung der Bildpunkte bemerkbar machen. Das Bild schrumpft durch Einschalten des Analysators, wie unsere Tabelle der Horizontalverschiebungen zeigt, in Richtung der meridionalen Wellenflächenebene wegen der größeren Lateralverschiebungen (die bei divergierenden Büscheln nach der Achse des Büschels zu gerichtet sind) stärker zusammen, als in der äquatorialen Ebene.

Die Differenz der Vertikalversetzungen, d. h. die astigmatische Differenz strebe bei abnehmender Neigung der Strahlen zur Achse einem endlichen Grenzwert zu; das ist bei der Differenz der Horizontalverschiebungen nicht der Fall, die in beiden Ebenen bei unendlich kleiner Büschelöffnung samt ihrer Differenz gleich 0 werden. Es ist von größerem Interesse, das Verhältnis der Lateralverschiebungen in den beiden senkrechten Hauptebenen für enge und weite Strahlneigungen zu vergleichen. Wenn dieses Verhältnis der Lateralverschiebungen unabhängig von der Öffnung des Büschels wäre, also für geringe Strahlneigung dasselbe wäre wie für große, so ließe sich die relative Schrumpfung des Bildes im Hauptschnitt gegenüber der dazu senkrechten Ebene als einfache proportionale Verkleinerung betrachten. Die in unserer Tabelle der Horizontalverschiebungen angegebenen Verhältniswerte für die verschiedenen Winkel zeigen, daß das nicht der Fall ist, so ist das Verhältnis bei 5° größer, bei 45° kleiner als $\frac{4}{3}$. Die Schrumpfung ist also keine gleichmäßige, woraus sich die für später nicht unwichtige Tatsache ergibt, daß sich der Fehler durch eine einfache Vergrößerung der zu kurz gekommenen Bildrichtung zwar verbessern, nicht aber völlig beseitigen läßt.

5. Beziehungen des Nicolastigmatismus zu dem Sorbyschen Phänomen und der Theorie von Stokes. Allgemeine Bemerkungen über Astigmatismus. Berechnung der astigmatischen Differenz unendlich enger Büschel bei Polarisationsprismen mit schräger Lage der optischen Achse. Graphische Darstellung der Abhängigkeit des Astigmatismus von der Achsenneigung. Spezifischer Astigmatismus der einzelnen Nicols.

Wenn man auf die Berücksichtigung der kaustischen Aberrationen verzichtet, sich mit anderen Worten also auf sehr enge Büschel beschränkt, so läßt sich der Astigmatismus der Polarisationsprismen (mit geraden Endflächen) auch sehr elegant im Anschluß an eine Theorie von Stokes (1877¹) behandeln, die dieser aufstellte, um das Phänomen von Sorby (1877²) zu erklären. Sorby hatte nämlich gefunden, daß man von einem unter dem Mikroskop liegenden Mikrometerplättchen nach Überdeckung mit einer doppeltbrechenden Kristallplatte nicht nur bei einer Einstellung, sondern (abgesehen von speziellen Fällen) in vier oder drei verschiedenen Höhen ein (unscharfes) Bild erhielt. Jedes der zwei bei der Doppelbrechung aus einem entstehenden Büschel liefert eben im allgemeinen nach dem Durchgang durch die doppeltbrechende Platte zwei Bildweiten, nur bei optisch einachsigem Material fallen für den ordinären Strahl, für den die Platte als isotrop betrachtet werden kann, zwei der Bilder zusammen. Sehen wir von dem ordinären Strahl ab, wie sich das für ein Nicol von selbst ergibt, so bleiben nur zwei Bilder übrig, und die Ähnlichkeit mit unserem Problem tritt zutage.

Bei dem Sorby-Stokesschen Fall gehen von einer Grenzfläche einer doppeltbrechenden planparallelen Platte (ziemlich weit-) divergente Büschel aus, während in unserem Falle konvergente (zeichnende) Büschel beliebiger Lage eine Platte durchsetzen. Es läßt sich indessen unschwer zeigen, daß für senkrecht zur Platte aus- bzw. eintretende Büschel die Versetzungen der Strahlen in beiden Fällen dieselben bleiben. In unserer Fig. 6 mag PEE_1 ein von der Grenzfläche der doppeltbrechenden Platte in P ausgehendes divergentes

1) On the Foci of Lines seen through a Crystalline Plate, Proc. Roy. Soc. London 26. p. 386. 1877.

2) Proc. Roy. Soc. London 26. p. 384. 1877; ferner: Mineral. Mag. 1. p. 97, 194. 1877 und 2. p. 1, 103. 1878.

Strahlenbüschel darstellen, das nach seinem Austritt aus der Platte nach A und S_1 so verläuft, als ob es von Punkt C_1 herkäme. Der Hauptstrahl PE soll dabei so gewählt sein, daß er aus der Platte senkrecht austritt. Dann stellt C_1F_1 die Vertikalverschiebung und PF_1 die Horizontalverschiebung der Büschel spitze dar. Andererseits betrachten wir nun ein konvergentes einfallendes Büschel, mit dem senkrecht auftreffenden Axialstrahl AE und dem seitlichen Strahl S_2E_2 , der parallel zu S_1E_1 ist. Dann stellt C_2 den ursprünglichen Konvergenzpunkt des Büschels dar, der nach dem Durchgang durch die Platte nach B verschoben wird. Da PB wieder parallel zu seiner ursprünglichen Richtung, also senkrecht zur Platte austreten muß, so ist die Horizontalverschiebung des Konvergenzpunktes C_2 in BF gegeben und dies ist gleich der Horizontalverschiebung PF_1 des divergenten Büschels. Da ferner PB parallel zu AF und DB parallel zu S_2E_2 sowie $PD = E_1E_2$ (zwischen Parallelen), so muß auch $C_1C_2 = PB = F_1F$ sein, woraus sich ergibt, daß auch $C_1F_1 = C_2F$, d. h. daß die Vertikalverschiebungen der Spitzen bei dem Sorbyschen divergenten und unserem Büschel gleich sind. Natürlich hätte sich auch dasselbe ergeben, wenn wir das zweite Büschel von B hätten ausgehen lassen, d. h. als divergentes Büschel betrachtet hätten, dessen Ausgangspunkt nicht wie bei dem Sorbyschen Fall in der Plattenfläche liegt.

Bei der vorliegenden Zeichnung ist angenommen, daß die Strahlen bei ihrem ganzen Verlauf in der Zeichenebene bleiben; das ist gewöhnlich nicht der Fall. Indessen wird die Beweiskraft der Überlegung dadurch nicht eingeschränkt, denn die Parallelität der Linien, auf die es allein ankommt, bleibt auch dabei im ganzen Verlauf erhalten.

Nach unserer allgemeinen Formel betrug die axiale Strahlenversetzung $V = D(1 - \tan \beta / \tan \alpha)$. Da wir von der Aberration stark geneigter Strahlen absehen und uns auf enge, senkrecht

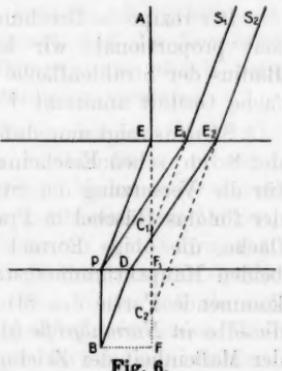


Fig. 6.

zur Platte einfallende Büschel beschränken wollen, so können wir für $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha$ auch $\sin \beta / \sin \alpha$, und wenn eine isotrope Platte vorliegt, $1/n$ setzen, wenn n der Brechungsindex ist. In der Form $V = D(1 - 1/n)$ wird die Formel bekanntlich benutzt, um den Brechungsindex von planparallelen Platten dadurch zu bestimmen, daß man mit der Mikrometerschraube des Mikroskops die (der Vertikalversetzung gleiche) scheinbare Hebung bestimmt, die ein Objektpunkt erfährt, wenn man unter dem Mikroskop die Platte darüber legt. Eben diese „Methode von de Chaulnes“ hatte Sorby bei doppeltbrechenden Platten anwenden wollen, als er die dreifache oder vierfache Einstellungsmöglichkeit entdeckte.

Der reziproke Brechungsindex ist der Strahlengeschwindigkeit proportional; wir können ihn daher noch durch den Radius der Strahlenfläche ersetzen, so daß die Formel die einfache Gestalt annimmt $V = D(1 - r)$.

Stokes zeigt nun, daß man zu einer zutreffenden Erklärung der Sorbyschen Erscheinung dadurch kommen kann, daß man für die Versetzung der Strahlen der Hauptkrümmungsebenen, der für das Büschel in Frage kommenden Partie der Strahlenfläche, die obige Formel in Anwendung bringt und für die beiden Hauptkrümmungsradien einsetzt. Um die in Betracht kommende Partie der Strahlenfläche zu finden, hat man sich dieselbe in *Normalgröße* (d. h. so, daß die beiden Achsen gleich der Maßeinheit der Zeichnung, dividiert durch die 2 extremen Brechungsindices ε und ω , sind) so zu zeichnen, daß sie die eine Fläche der Platte in dem Austrittspunkt des Axialstrahls tangiert.

Wir weichen bei der genaueren Durchführung im folgenden von der Stokes'schen Überlegung etwas ab und holen zunächst noch zu einigen allgemeineren Bemerkungen über Astigmatismus aus, die die grundlegende Wichtigkeit der astigmatischen Erscheinungen bei doppeltbrechenden Platten noch deutlicher herausheben werden.

In isotropen Medien entspricht einem punktförmigen Strahlenausgang bzw. einer punktförmigen Strahlenvereinigung eine kugelförmige Wellenfläche. Punktlosigkeit in einem ganz allgemeinen Sinne hängt also immer mit einer Deformation der kugelförmigen Wellenfront zusammen. Die Deformation kann achsensymmetrisch sein (man denke etwa an die Um-

wandlung einer Kugelkappe in die Polkappe eines Rotationsellipsoides), dann ergeben sich für die Strahlen verschiedener Öffnung Aberrationen der Schnittweite auf der Achse. Oder aber die Deformation ergibt keine zur Büschelachse symmetrische Rotationsfläche, so daß ihre Normalen, d. h. die Strahlen, im allgemeinen in verschiedenen Richtungen aus den Achsenebenen, in denen sie anfangs verliefen, abgelenkt werden. Neben völlig unregelmäßiger Deformation und Zerstreuung der Strahlen sind dabei jedoch verschiedene regelmäßige Fälle möglich, von denen diejenigen als Astigmatismus im engeren Sinne hervorgehoben zu werden verdienen, in denen bei der Deformation in der Wellenfront in zwei meist aufeinander senkrechten Richtungen kreisähnlich gekrümmte (z. B. torische) Flächen entstehen, derart, daß die Normalen (Strahlen) dieser Stellen alle annäherungsweise durch zwei verschieden zueinander gelagerte Brennlinien verlaufen.

Bei punktualem Strahlenursprung können nun Abweichungen von einer kugelförmigen Strahlenfläche entweder durch Grenzübergänge zwischen isotropen Medien oder durch Verlauf in anisotropen, besonders doppeltbrechenden Medien, zustande kommen. Im ersten Falle beruht die Deformation darauf, daß die verschiedenen Teile der Wellenfläche die Grenzfläche nicht gleichzeitig durchsetzen können, so daß sie auf verschiedenen langen Wegen die hemmende oder fördernde Wirkung der veränderten Fortpflanzungsgeschwindigkeit erfahren. Wenn sich diese Beeinflussung an den Strahlen zweier aufeinander senkrechter Ebenen in besonders extremer Weise äußert, wie das beim senkrechten Durchgang durch eine Zylinderfläche oder beim schrägen Durchgang durch eine Ebene oder eine Kugelfläche der Fall ist, so muß eigentlicher Astigmatismus auftreten.

In doppeltbrechenden Medien wird die Strahlenfläche auch ohne Grenzübergang keine Kugel, also in unserem Sinne deformiert, freilich ohne daß zunächst der homozentrische Verlauf der Strahlen dadurch geändert würde. Denkt man sich jedoch, man könnte die kristallinische Substanz, in der sich eine von einem Punkt ausgehende Lichterregung eine kurze Zeit fortgepflanzt hätte, plötzlich in eine isotrope verwandeln, oder man ließe Lichtstrahlen vom Mittelpunkt eines doppeltbrechenden Körpers ausgehen, der äußerlich die Oberfläche der (extra-

ordinären) Wellenfläche besäße, so würde die (betreffende) Wellenfläche, ohne im Moment des Grenzüberganges auch nur an einer einzigen Stelle eine Änderung zu erfahren, in das isotrope Medium übergehen, und trotzdem würde die homozentrische Strahlenrichtung nach diesem Übergang plötzlich zerstört sein. Das liegt daran, daß in dem Kristall die Strahlen nicht auf der Wellenfläche senkrecht stehen, wogegen die Strahlen sofort mit den Wellennormalen identisch werden, wenn ein Übergang in ein isotropes Medium stattfindet. In doppeltbrechenden Medien besteht trotz homozentrischen Strahlenausgangs von vornherein ein Astigmatismus der Wellennormalen und wenn diese beim Übergang zum isotropen Medium zu Strahlen werden, so überträgt sich die homozentrische Abweichung auf diese auch dann, wenn der Grenzübergang an sich ohne jede Deformation der Strahlenfläche verläuft, also den Astigmatismus nicht veranlassen kann.

Wir können daher nach der Entstehungsweise zwei Arten von Astigmatismus (im weitesten Sinne) auseinander halten, nämlich den Astigmatismus der Grenzübergänge zwischen isotropen Medien und den Astigmatismus der Wellennormalen doppeltbrechender Substanzen, der beim Übergang zu isotropen Medien auch an den Strahlen in Erscheinung tritt.

Von der homozentrischen Abweichung der Wellennormalen kann man sich für die extraordinaire Strahlenfläche eines einachsigen Kristalls leicht ein anschauliches Bild machen. Diese Strahlenfläche stellt ein Rotationsellipsoid dar. Wenn man die Normalen einer Ellipse zeichnet, so bilden dieselben nicht wie bei einem Kreis, einen einzigen Ansammlungspunkt in der Mitte, sondern die größte Strahlendichte herrscht offenbar auf der von jenen Normalen eingehüllten Kurve, also auf einer Asteroide. Bei einer Ellipse bildet also die zugehörige Evolute, die Asteroide, und bei einem Rotationsellipsoid dementsprechend das zugehörige Rotationsasteroid die Linie bzw. Fläche größter Strahlendichte für die Wellennormalen, die an Stelle des Brennpunktes oder des Strahlenausgangspunktes tritt. Für das Rotationsellipsoid kommt noch die Achse des zugehörigen Asteroids als Linie größter Strahlendichte hinzu, weil alle Normalen des Ellipsoids durch diese Strecke hindurchgehen (vgl. Fig. 8).

Um den Astigmatismus der Wellennormalen doppelt-

brechender Substanzen rein betrachten zu können, haben wir oben die Wellenfläche selbst als Grenzfläche zum isotropen Medium angenommen, weil diese Grenzfläche keine Deformation der Strahlenfläche veranlassen würde. Im allgemeinen wird man es natürlich nicht mit dieser, sondern mit irgendeiner anderen Grenzfläche zu tun haben, so daß sich im allgemeinen beim Austritt von Strahlenbüscheln aus doppelbrechenden Medien eine Übereinanderlagerung zweier homozentrischer Störungen vollziehen wird, nämlich eines Wellennormalenastigmatismus und einer Grenzflächenstörung.

Wir können beide Störungen aber getrennt behandeln und wollen den für unsere Zwecke wichtigsten Übergang einer ebene Grenzfläche tangierenden Wellenfläche aus einem dichtenen Medium in Luft so zu fassen suchen, daß dabei keine Voraussetzungen über die einfache oder doppelbrechende Natur des ersten Mediums gemacht werden. In Fig. 7 soll WF die Wellenfläche bedeuten, die die Grenzebene in B tangiert und im Begriff ist, sie zu überschreiten. Nach einem sehr kleinen Zeitteilchen mögen die (entsprechend gewählten) Endpunkte der Wellenfläche sich um s , nämlich bis zur Grenze in W' und F' , fortbewegt haben, dann ist der vorher berührende Punkt B der Wellenfläche gleichzeitig in Luft um einen etwas größeren Betrag s' fortgeschritten, sagen wir bis A . Wenn wir nun die Annahme machen, daß der in der Ebene liegende Schnitt der Strahlenfläche sowohl vor dem Grenzübergang nahezu ein Kreis war und auch nachher — unter Verzicht auf kleinere Aberrationen auf der Achse — als solcher betrachtet werden kann, so lassen sich die Mittelpunkte C und C' dieser Kreise leicht finden. Gesucht ist für uns der Radius $AC' = r$ der neuen Wellenfläche, oder aber die Strecke BC' , die für ein unendlich enges Büschel gleich r gesetzt werden kann und die dann gestattet, die Vertikalverschiebung des Konvergenzpunktes $CC' = R - BC'$ leicht anzugeben.

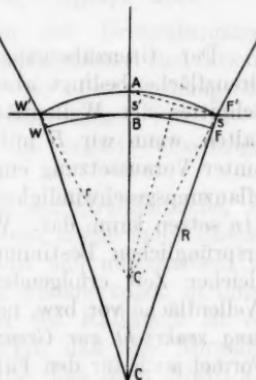


Fig. 7.

Für BF' ergibt sich als Kathete in dem Dreieck BCF' der Wert:

$$BF'^2 = CF'^2 - BC^2 = (R + s)^2 - R^2 = 2Rs + s^2.$$

BF' läßt sich andererseits als halbe Sehne durch die Abschnitte des auf ihr senkrechten Durchmessers ausdrücken:

$$BF^2 = s'(2r - s') = 2rs' - s'^2.$$

Es ergibt sich danach:

$$2Rs + s^2 = 2rs' - s'^2, \text{ wobei } s^2 \text{ und } s'^2$$

als kleine Größen einer höheren Ordnung vernachlässigt werden können, so daß sich schließlich ergibt:

$$r = \frac{R \cdot s}{s'}.$$

Der Grenzübergang einer Wellenfläche senkrecht zur Grenzfläche bedingt also eine Verkleinerung des Radius des Schnittes der Wellenfläche, eine Verkleinerung, die wir erhalten, wenn wir R mit s/s' multiplizieren. s/s' stellt aber (unter Voraussetzung enger Büschel) das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, für das man in isotropen Medien $1/n$ setzen kann, dar. Wir bleiben aber bei der allgemeineren ursprünglichen Bestimmung, daß s/s' das Verhältnis der in gleicher Zeit erfolgenden Verschiebungen darstellt, die die Wellenfläche vor bzw. nach dem Austritt in Luft in der Richtung senkrecht zur Grenzfläche erfährt. Dann läßt sich die Formel auch für den Fall anwenden, daß die Wellenfläche im ersten Medium gar nicht senkrecht zur Grenzfläche, sondern schräg anrückte. Man hat dabei lediglich an Stelle der eigentlichen Geschwindigkeit der Wellenfläche die Geschwindigkeit in Richtung der Grenzflächennormale einzusetzen.

Es ist leicht einzusehen, daß die vorstehende Betrachtung so allgemein ist, daß sie auch dann gültig bleibt, wenn die betreffende Wellenfläche in verschiedenen Ebenen verschieden starke Krümmungen aufweist, wenn die Schnitte in diesen Ebenen nur bei engen Büscheln als nahezu kreisförmig betrachtet werden können. Der Reduktionsfaktor s/s' bleibt dabei sogar für die Krümmungsradien einer tangierenden Wellenfläche derselbe, weil die Verschiebungsgeschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche für einen kleinen Teil einer Wellenfläche für alle Azimute so gut wie gleich ist. Handelt es sich

zum Beispiel um eine in zwei aufeinander senkrechten Ebenen verschiedene stark gekrümmte Wellenfläche mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 , so werden der Wellenfläche nach dem Übertritt in Luft die Radien $R_1 \cdot s/s'$ und $R_2 \cdot s/s'$ zukommen. Da uns die Krümmungsradien die Wellennormalen und im isotropen Medium die Strahlen und den Abstand ihrer Schnittpunkte angeben, so bedeutet $R_1 - R_2$ die astigmatische Differenz der Wellennormalen vor der Grenze und $R_1 \cdot s/s' - R_2 \cdot s/s'$ die astigmatische Differenz im isotropen Medium nach dem Grenzübergang. Wie man sieht, geht also auch die astigmatische Differenz beim Passieren der Grenze durch einfache Multiplikation mit dem Reduktionsfaktor s/s' aus dem alten Wert $R_1 - R_2$ in den neuen Wert $(R_1 - R_2) \cdot s/s'$ über.

Nach Erledigung der Vorfrage der Grenzübergangswirkung, die sich durch Anwendung eines einfachen Reduktionsfaktors darstellen läßt, gehen wir zur Untersuchung des Astigmatismus enger, senkrecht austretender Büschel in doppeltbrechenden Medien (speziell im negativ einachsigen Kalkspat) über.

Wir betrachten eine kleine Partie der Strahlenfläche, wie sie etwa durch ein enges, vom Zentrum ausgehendes Büschel auf der Peripherie ausgeschnitten wird und untersuchen, wo die Normalen dieser Partie dichteste Annäherungen in ihrem Verlauf zeigen. Die Strahlenfläche des Kalkspats ist ein Rotationsellipsoid (Fig. 8), daraus folgt, daß alle Normalen durch die Achse gehen, und daß alle diejenigen Normalen, die (in bezug auf die Achse) auf einem Breitenkreis liegen, durch einen gemeinsamen Punkt der Achse verlaufen. Die Normalen eines Breitenkreises erfahren also eine punktuelle Vereinigung, sie laufen allerdings nicht in einer Ebene, sondern auf einem Kegelmantel, doch kann der enge Sektor, den ein enges Büschel von einem solchen Mantel umfassen kann, als nahezu eben betrachtet werden. Nun liegt der Fußpunkt einer jeden Normalen auf einem Breitenkreise, wir können uns also über den Verbleib sämtlicher Wellennormalen einer einem engen Büschel entsprechenden kleinen Partie der Strahlenfläche unterrichten, wenn wir die Normalen nach den Breitenkreisreihen zusammengefaßt betrachten, denen sie angehören. Die Brennpunkte der einzelnen Breitenkreisreihen auf der Achse reihen sich aber zu einem Stück der Achse aneinander, so daß

erhellt, daß alle Wellennormalen durch eine kurze auf der Rotationsachse liegende Brennlinie hindurchgehen. Diese Brennlinie steht im allgemeinen auf der Achse des Büschels

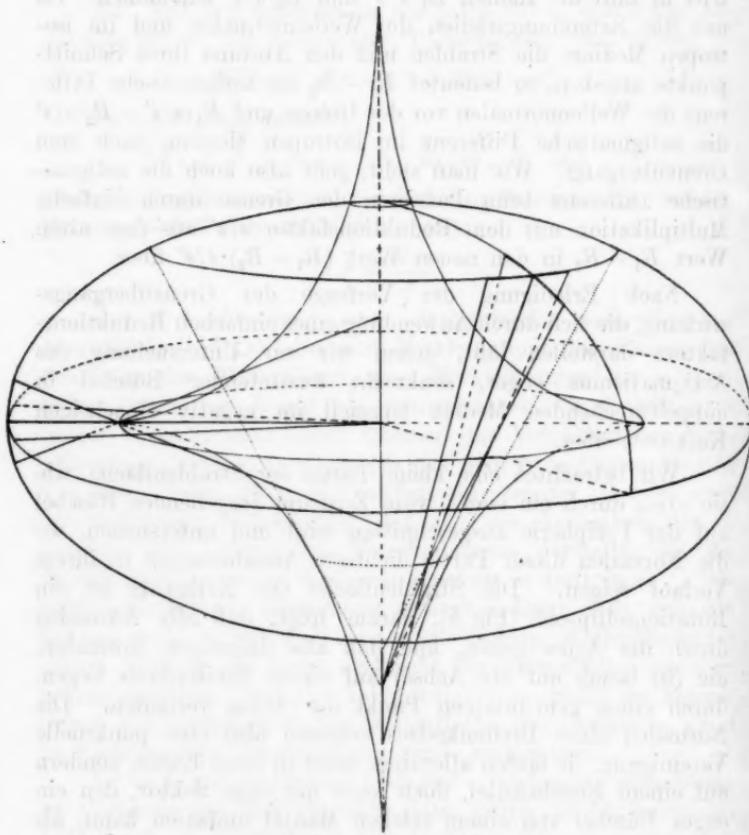


Fig. 8.

nicht senkrecht (nur dann, wenn diese Büschelachse in der Äquatorebene des Ellipsoids liegt).

Die Normalen unserer kleinen Partie der Strahlenfläche bilden aber noch eine zweite Brennlinie, die ein Stückchen eines Breitenkreises des Asteroids darstellt. Das wird deutlich, wenn wir bedenken, daß die Fußpunkte aller Wellennormalen

auch auf Meridianen der Strahlenfläche liegen. Die Normalen eines Meridianstückchens ergeben aber (angenähert) einen Brennpunkt auf einem Breitenkreis des Asteroids, und die Brennpunkte der in der kleinen Partie nebeneinanderliegenden Teile benachbarter Meridiane fügen sich zu einem kleinen Stück eines Asteroidenbreitenkreises zusammen. Wenn wir daher die Wellennormalen eines Büschels nach den Meridianen zusammenfassen, denen sie angehören, so ergibt sich also, daß alle diese Normalen eine kurze Brennlinie auf einem Asteroidenbreitenkreis erzeugen, eine Linie, die bei sehr engen Büscheln als Gerade betrachtet werden kann.

Zusammenfassend ergibt sich also, daß alle Strahlen eines Büschels durch zwei Brennlinien gehen, von denen die eine der Achse, also einer meridionalen Ebene, die andere einer Breitenkreisebene des Asteroids angehört. Die Brennlinien liegen also wohl in zwei aufeinander senkrechten Ebenen, doch steht im allgemeinen nur die eine auf der Büschelachse senkrecht (vgl. Fig. 8).

Wir haben es also mit einem echten Astigmatismus zu tun, die astigmatische Differenz wird gegeben durch den Abstand der Schnittpunkte der Brennlinien mit der Büschelachse. Wir bestimmen erst die Abstände der beiden Brennlinien von der Partie der Strahlenfläche.

Die Normalen in der Breitenkreisebene schneiden sich auf der Achse, die Entfernung des Strahlenschnittpunktes in dieser Ebene ist also durch den Abschnitt der Ellipsennormale zwischen Kurvenpunkt und Schnittpunkt mit der (kurzen) Achse gegeben (Fig. 8).

In der Meridianebebene gibt uns der Schnittpunkt sehr benachbarter Ellipsennormalen den gesuchten Konvergenzpunkt; seine Entfernung ist also durch die Länge des Krümmungsradius des meridionalen elliptischen Schnittes der betreffenden Stelle gegeben (Fig. 8).

Beide gesuchten Entfernungen sind leicht zu berechnen. Wir brauchen dazu die Gleichung der Ellipse mit der kurzen Achse b und der langen a , die demnach lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ferner brauchen wir den ersten und den zweiten Differentialquotienten. Nun ist:

$$\underline{y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}$$

und demnach die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{b}{a} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} \left(\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x \cdot x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \\ &= -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot \frac{a^2 - x^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \end{aligned}$$

oder

$$\underline{y'' = -\frac{b \cdot a}{(a^2 - x^2)^{3/2}}}.$$

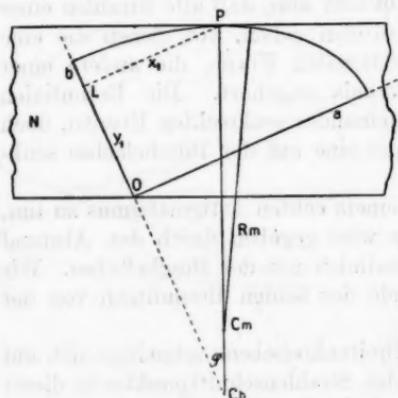


Fig. 9.

Wir berechnen nun

1. Die Länge der Normalen $PC_b = R_b$ (vgl. Fig. 9).

Die Gleichung einer Normalen im Kurvenpunkt $x_1 y_1$ lautet allgemein

$$\eta - y_1 = -\frac{1}{y'}(\xi - x_1),$$

das absolute Glied ist also

$$\frac{x_1}{y'} + y_1.$$

Dieses absolute Glied ist gleich dem Abschnitt

auf der positiven Y-Achse, also ist der absolute Betrag der Strecke

$$OC_b = -\left(\frac{x_1}{y'} + y_1\right).$$

Demnach ergibt sich für LC_b der Wert

$$OC_b + y_1 = -\frac{x_1}{y'},$$

und endlich:

$$LC_b = \frac{a \sqrt{a^2 - x_1^2}}{b}.$$

Nun ist aber

$$R_b^2 = PC_b^2 = LC_b^2 + x_1^2,$$

also

$$R_b^2 = \frac{a^4}{b^2} (a^2 - x_1^2) + x_1^2 \quad \text{oder} \quad b^2 (R_b^2 - x_1^2) = a^4 - a^2 x_1^2$$

oder schließlich:

$$a^2 x_1^2 + b^2 (R_b^2 - x_1^2) = a^4.$$

Wir führen nun den Neigungswinkel φ zwischen Normale und optischer Achse ein, indem wir für x_1 den Wert $R_b \sin \varphi$ einsetzen; dann ergibt sich:

$$a^2 \cdot R_b^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cdot R_b^2 \cdot \cos^2 \varphi = a^4$$

oder

$$R_b^2 \cdot (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi) = a^4$$

und schließlich für R_b^2 :

$$R_b^2 = \frac{a^4}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad R_b = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

2. Der Krümmungsradius R_m in der Meridionalebene.

Wir bestimmen den Krümmungsradius $R_m = PC_m$ nach der allgemeinen Formel für den Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{(1 - y'^2)^{1/2}}{y''}.$$

Durch Einsetzen der oben für die erste und zweite Ableitung gefundenen Werte ergibt sich:

$$R_m = - \frac{\left(1 + \frac{b^2 \cdot x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)^{1/2}}{\frac{a \cdot b}{(a^2 - x^2)^{1/2}}} = - \frac{[a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2]^{1/2}}{a^4 \cdot b}.$$

Die Basis des Zählers dieses Bruches ist aber nach p. 321 oben $= b^2 \cdot R_b^2$, also:

$$R_m = - \frac{(b^2 R_b^2)^{1/2}}{a^4 \cdot b} = - \frac{b^2}{a^4} \cdot R_b^2 = - \frac{b^2 \cdot a^6}{a^4 \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$R_m = - \frac{a^2 \cdot b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Damit sind die Schnittweiten der Wellennormalen im Hauptschnitt und einer dazu senkrechten Ebene allgemein für jeden beliebigen Punkt der Wellenfläche bestimmt. Die Schnittweiten sind verschieden, so daß (außer am Pol der Strahlenfläche) immer ein echter Astigmatismus auftreten muß. In Fig. 8 ist ein astigmatisches Wellennormalenbüschel

in eine Figur der Strahlenfläche und des zugehörigen Rotationsasteroids für einen beliebig gewählten Punkt eingezeichnet. Außerdem ist in der linken Hälfte noch ein astigmatisches Büschel für einen äquatorialen Punkt zur Darstellung gebracht. Für diese Punkte ist der Astigmatismus am größten.

Wir können nun zur Betrachtung der Erscheinungen an einer Platte bzw. einem Polarisationsprisma zurückkehren. In

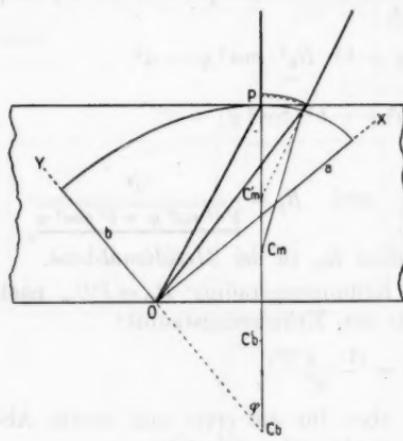


Fig. 10.

Fig. 10 ist das von einer Fläche der Platte ausgehende und senkrecht zur anderen Fläche austretende Büschel dargestellt. Der senkrecht austretende Strahl ist nichts anderes als die Verlängerung der Normalen der Wellenfläche im Tangentialpunkt. Der in der obigen Formel eingeführte Winkel φ stellt also den Neigungswinkel der optischen Achse YO gegen die Plattennormale, d. h. im

Mikroskop¹⁾ gegen die Achse des Tubus dar. C_b und C_m sind die beiden Konvergenzpunkte, die übrigens nicht immer auf verschiedenen Seiten der unteren Plattengrenze, sondern, wie Fig. 9 zeigt, auch beide darunter liegen können.

Beim Durchgang durch die Grenze werden diese Konvergenzpunkte der Wellennormalen nun nach oben verschoben, und zwar, wie wir gesehen haben, derart, daß die Abstände PC_b und PC_m eine relativ zu ihrer Länge gleich starke Reduktion erfahren. So kommen wir zu den Punkten C'_b und C'_m , die nun die Konvergenzpunkte der wirklich austretenden Strahlen darstellen. In Fig. 10 sind auch die in der Meridianebene liegenden, zu C_m und C'_m gehörigen Büschel dargestellt. Um unsere Aufgabe ganz zu Ende zu führen, müssen wir jetzt noch den Reduktionsfaktor der Verkürzungen von $R_b = PC_b$

1) Mit einem Nicol mit geraden Endflächen.

und $R_m = PC_m$ feststellen. Nach unseren Auseinandersetzungen über den Grenzübergang war er gleich s/s' , d. h. gleich dem Verhältnis der in gleicher Zeit in Richtung senkrecht zur Platte von der Wellenfläche zurückgelegten Strecken.

Nehmen wir als Vergleichszeit die Dauer des Fortschreitens des Büschels von seinem Ursprungsort bis zum Austrittspunkt an der anderen Fläche, so hat das Element der Wellenfläche während dieser Zeit senkrecht zur Plattenebene einen Weg gleich der Dicke D der Platte zurückgelegt. In Richtung zum Pol bzw. zum Äquator der Strahlenfläche würde sich eine Lichterregung in derselben Zeit um die Strecke b bzw. a fortgepflanzt haben, wenn a und b die beiden Achsen derjenigen Hauptschnittellipse darstellen, die sich bei der Platte von der Dicke D nach der Konstruktion ergibt. Der entsprechende Weg in Luft ist aber ε - bzw. ω mal größer, also gleich: $b \cdot \omega = a \cdot \varepsilon$, wenn ω und ε die beiden Hauptbrechungsindizes der Substanz, also des Kalkspates, darstellen. Ersetzen wir noch ω und ε durch $1/o$ und $1/e$, d. h. durch die Radien der Strahlenfläche in Normalgröße, so erhalten wir für den Weg in Luft den Wert $b/o = a/e$, und demnach für das gesuchte Fortschrittsverhältnis

$$D:b/o = D:a/e \quad \text{oder} \quad \frac{D \cdot o}{b} = \frac{D \cdot e}{a}.$$

Es ist ersichtlich, daß durch Multiplikation mit dieser Größe die Ausdrücke für R_b und R_m den Faktor D erhalten, und daß im übrigen nur eine Ersetzung von a durch e und von b durch o stattfindet, d. h. wir erhalten schließlich für die definitiven Radien r_b und r_m ein Produkt aus der Plattendicke D mit den Krümmungsradien der Strahlenfläche in Normalgröße (ρ_b bzw. ρ_m). Für die Vertikalverschiebung, die nach unserer Fig. 10 gleich $D - D \cdot \varrho$ ist, ergibt sich damit tatsächlich, wie oben vorausgreifend bemerkt wurde, ein Ausdruck $D(1 - \varrho)$, der also dem für isotrope Medien ganz analog ist, und in dem nur an Stelle von r der betreffende Krümmungsradius erscheint.

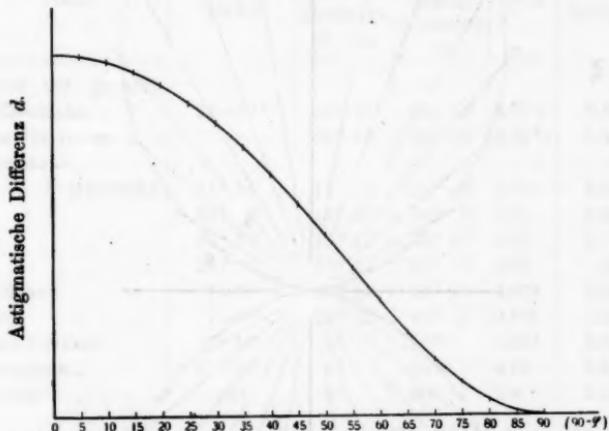
Für die astigmatische Differenz für ein Prisma von der Länge D ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} d &= D \left[\frac{e^2}{(e^2 \sin^2 \varphi + o^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{e^2 \cdot o^2}{(e^2 \sin^2 \varphi + o^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \right] \\ &= D \frac{e^2(e^2 - o^2) \sin^2 \varphi}{N^{1/2}}. \end{aligned}$$

Werte von R_b und R_s und von der astigmatischen Differenz d für $D = 1$ und $D = 2,5$ cm.

| $\varphi =$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|----------------------|
| R_b | 0,75065 | 0,74997 | 0,74790 | 0,74458 | 0,74013 | 0,73475 | 0,72868 | 0,72213 | 0,71533 | 0,70851 |
| R_s | 0,78065 | 0,74859 | 0,74240 | 0,73257 | 0,71952 | 0,70395 | 0,68666 | 0,66530 | 0,64459 | 0,63118 |
| Astigm. Differenz d für $D = 1$ | 0,00000 | 0,00138 | 0,00550 | 0,01201 | 0,02061 | 0,03080 | 0,04202 | 0,05388 | 0,06374 | 0,07733 |
| Astigm. Differenz d für $D = 2,5$ cm | 0,00000 | 0,00345 | 0,01375 | 0,03002 _s | 0,05152 _s | 0,07700 | 0,10505 | 0,13457 _s | 0,16485 | 0,19332 _s |
| $\varphi =$ | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° | |
| R_b | 0,70191 | 0,69567 _s | 0,68995 _s | 0,68491 | 0,68064 _s | 0,67725 | 0,67477 _s | 0,67329 | 0,67277 | |
| R_s | 0,61372 | 0,59149 | 0,58290 | 0,57020 | 0,55960 | 0,55128 | 0,54525 | 0,54165 | 0,54041 | |
| Astigm. Differenz d für $D = 1$ | 0,08819 | 0,09815 | 0,10705 _s | 0,11471 | 0,12104 _s | 0,12597 | 0,12952 _s | 0,13164 | 0,13236 | |
| Astigm. Differenz d für $D = 2,5$ cm | 0,22047 _s | 0,24535 | 0,26768 _s | 0,28677 _s | 0,30261 _s | 0,31492 _s | 0,32381 | 0,32910 | 0,33090 | |

Nach dieser Formel sind die in der nebenstehenden Tabelle angegebenen Werte von r_b und r_m und der astigmatischen Differenz für eine Platte von der Dicke 1 und 2,5 cm berechnet. Die Kurve der Fig. 11 stellt die Abhängigkeit von d und φ graphisch dar, dabei ist die Gradzahl von $90 - \varphi$ auf der Abszisse abgetragen. Ein vielleicht noch anschaulicheres Bild der Beziehung gibt Fig. 12, die die Beziehung in Polarkoordinaten darstellt. φ ist als Winkel aufgetragen, d als Radiusvektor, als Länge des freien Schenkels von φ . Die Länge des Radius



Divergenz von Axialstrahl und optischer Achse.

Fig. 11.

gibt also unmittelbar für die durch seinen Winkel mit der X-Achse dargestellte Neigung der optischen Achse die astigmatische Differenz.

Wie man sieht, ist der Astigmatismus für $\varphi = 90^\circ$, d. h. für die Thompson-Glanschen Prismen, die wegen ihrer sonstigen Vorzüge so oft angewandt werden, am größten. Die astigmatische Differenz ist hier, wie man leicht aus der allgemeinen Formel sieht, $= D(e - o^2/e) = D(1/e - \varepsilon/\omega^2)$. Für eine genauere Vergleichung des astigmatischen Fehlers muß man jedoch die bei verschiedenen Polarisationsprismen verschiedene relative Länge mit in Rücksicht ziehen, man muß mit anderen Worten den Astigmatismus verschiedener Nicoltypen von der-

selben Breite oder demselben Querschnitt vergleichen. Man könnte dann von einem spezifischen Astigmatismus der ver-

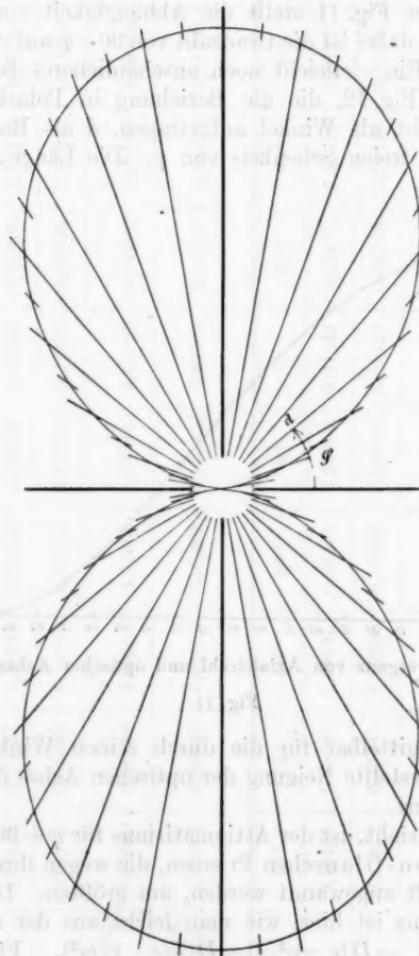


Fig. 12.

schiedenen Nicoltypen reden und erhält ein Maß dafür in dem Produkt aus der für den betreffenden Achsenneigungswinkel

in Frage kommenden astigmatischen Differenz mit dem Verhältnis der Länge L zur Breite B des Prismas:

$$\text{Spezifischer Astigmatismus} = d \cdot \frac{L}{B}.$$

Im folgenden ist der spezifische Astigmatismus einiger bekannter Typen von Polarisationsprismen angeführt:

| Name | Öffnungswinkel | Winkel zwischen opt. Achse und Mikroskopachse Endfläche 90 - φ | L/B | Spez. Astigmat. |
|-----------------------------------|---------------------------------------|---|------------------------------|----------------------------------|
| Nicol mit gerader Endfläche . . . | 24—27° | 26° 15' 63° 45' | 4,70 ¹⁾ | 0,531 |
| dasselbe invers . . . | | 26° 15' 63° 45' | 4,70 ¹⁾ | 0,531 |
| Hartnack- | | | | |
| Prazmowsky | 41° 54' 35° 0' 30° 0' 20° 0' | 18° 55' 76° 5' 15° 55' 74° 5' 17° 28' 72° 37' 20° 21' 69° 39' | 4,04 3,51 3,19 2,10 | 0,512 0,439 0,395 0,253 |
| Hofmann | 7—8° | 26° 15' 63° 45' | 0,889 | 0,095 |
| Soret | 7—8° | 26° 15' 63° 45' | 0,795 | 0,090 |
| Glan-Foucault . . . | 7° 56' | 0° 90° | 0,924 | 0,122 |
| Thompson | 41° 50' | 0° 90° | 4,16 | 0,551 |
| Ahrens | 26° | 0° 90° | 1,8 | 0,238 |

Da der Öffnungswinkel von großer Bedeutung für die Anwendbarkeit eines Nicols ist, so würde zum Vergleich der Polarisationsprismen vielleicht der Quotient von Öffnungswinkel durch spezifischen Astigmatismus ein brauchbares Maß der „relativen Leistung“ darstellen.

6. Über die Bildverzerrung bei Prismen mit schräger Lage der optischen Achse.

Die Formeln des vorigen Kapitels für die Berechnung des Astigmatismus geben Grenzwerte für sehr enge Büschel. Für die größeren Öffnungen, die bei den das Gesichtsfeld projizieren,

1) Als Breite ist dabei der Durchmesser des dem rhombischen Querschnitt einbeschriebenen größten Kreises gerechnet.

Von einer Anführung des gewöhnlichen Nicols ist abgesehen, weil sich wegen der schrägen Endflächen dabei besondere Verhältnisse ergeben.

zierenden Büscheln auftreten, ergeben sich ziemlich erhebliche Abweichungen. Dazu kommt, daß für die Betrachtung des Astigmatismus die im Hauptsnitt und in der dazu senkrechten Ebene verlaufenden Strahlen eine so dominierende Rolle spielen, daß sich die Analyse auf diese beschränken kann. Die Bildverzerrung tritt dagegen in allen Azimuten zutage, so daß auch aus diesem Grunde in jener Behandlung des Astigmatismus keine hinreichende Grundlage für eine genaue Behandlung der Bildverzerrung gegeben sein kann. Immerhin mag kurz angedeutet werden, wie man auf Grund der astigmatischen Werte zu einer Vorstellung über den Grad der Bildverzerrung in den beiden Hauptebenen gelangen kann.

Wenn bei einem projizierenden Büschel der Abstand der Spitze (d. h. des Projektionszentrums) von der Bild- und Projektionsebene = p ist, so entspricht einem Strahl von der Neigung a ein Abstand vom Bildzentrum von der Größe $p \cdot \operatorname{tg} a$. Bei einem astigmatischen, projizierenden Büschel ist p keine Konstante für alle Azimute, wenn der kleinste Abstand in einer Ebene = p ist, so ist er in der dazu senkrechten anderen Hauptebebe um die astigmatische Differenz q größer, also $p+q$. Ein Strahl von gleicher Neigung wird also im Bilde in der einen Ebene einen Zentrum abstand von $p \cdot \operatorname{tg} a$, in der dazu senkrechten Richtung aber einen Punkt im Abstand $(p+q) \cdot \operatorname{tg} a$ ergeben. Der absolute Wert der Verzerrung ist also $= q \cdot \operatorname{tg} a$, die relative Vergrößerung in der einen Bildrichtung also

$$\frac{p+q}{p} = 1 + q/p.$$

Zu der eigentlichen Bildverzerrung gesellt sich bei schiefen Achsenlage eine erhebliche Gesamtverschiebung des Bildes durch die Lateralversetzung des axialen Strahls. Nach Fig. 10 ist diese Lateralverschiebung

$$H = (R_b - D) \operatorname{tg} \varphi = D \left[\frac{s^2}{(s^2 \sin^2 \varphi + o^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} - 1 \right] \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

II. Teil. Die Beseitigung des Astigmatismus und der Bildverzerrung beim Polarisationsmikroskop.

1. Umgehung des Fehlers durch Anwendung von Analysatoren, die den ordinären Strahl benutzen.

Der Astigmatismus der Nicols hängt, wie wir gesehen haben, mit den Krümmungsverhältnissen der Strahlenfläche zusammen. Wenn die Wellenfläche der Substanz des Analy-

sators für die ihn durchsetzenden Strahlen eine Kugel wäre, so würde dieser Astigmatismus nicht auftreten, vielmehr würde sich die Störung des Strahlenverlaufs auf die Momente beschränken, die von der dioptrischen Wirkung isotroper planparalleler Platten bekannt sind. Nun ist aber auch für den Kalkspat die Strahlenfläche für die polarisierten ordinären Strahlen eine Kugel, so daß man den geschilderten Astigmatismus verhindern könnte, wenn man einen Analysator verwendete, der den ordinären Strahl durchließe.

Derartige Analysatoren existieren, doch ist der jetzt hervortretende Vorteil derselben bisher nicht erkannt und beachtet worden. Diese Analysatoren teilen, soweit sie sich in Bau und Wirkungsweise an das Nicol anschließen, auch dessen großes Gesichtsfeld. Es handelt sich besonders um die Lamellenprismen von Jamin¹⁾, Zenker²⁾ und Feußner³⁾ (vgl. besonders K. Feußner 1884²), Grosse 1891⁴), Thompson⁵), bei denen eine dünne Lamelle von Kalkspat oder Natronalsalpeter in schräger Richtung — ungefähr wie die Kittschicht eines Nicols — in ein isotropes Medium vom Brechungsexponenten des ordinären Strahls eingeschlossen wird. Für die im Hauptschnitt schwingenden Strahlen wird der Brechungsexponent an der Lamelle kleiner, sie werden also total reflektiert; die senkrecht dazu schwingenden Strahlen treten dagegen ungebrochen durch. Diese Polarisatoren sind astigmatisch und verzeichnungsfrei, nicht nur weil der die Lamelle als ordinarer Strahl durchsetzende Anteil des Lichtes benutzt wird, sondern auch schon deshalb, weil fast die ganze Länge des Polarisators aus isotropem Material (Flintglas) besteht. Trotzdem haben sich diese Prismen keinen Eingang in die Praxis verschaffen können. Die Herstellung der Lamellenprismen scheint technisch etwas umständlicher zu sein, doch würde der erhebliche geringere Gebrauch von Kalkspat immer noch eine Verbilligung mit sich bringen. Die Verwendung des an sich recht geeigneten

1) Pogg. Ann. 137. p. 174. 1869.

2) Ztschr. f. Instrumentenk. 4. p. 50. 1884.

3) K. Feußner, Über die Prismen zur Polarisation des Lichtes, Ztschr. f. Instrumentenk. 4. p. 41—50. 1884.

4) W. Grosse, Über Prismen zur Polarisation des Lichtes, Verh. d. Gesellsch. deutsch. Naturf. u. Ärzte 63 (II. Teil 1891.) p. 33—36. 1890.

5) S. P. Thompson, On the Nicol prism and its modern varieties, in: Proc. of the optical convention, p. 216—240, London 1905.

Natronalsalpeters hat sich wegen der stark hygrokopischen Eigenschaften dieses Materials als unpraktisch erwiesen. Auch hat sich die Herstellung genügend großer Salpeterkristalle nicht mit genügender Sicherheit durchführen lassen, obwohl Versuche in großem Maßstabe zu diesem Ziel angestellt worden sind. Der Verwendung von Kalkspatlamellen steht nach Feußner und nach persönlicher Mitteilung von Herrn Dr. Reuter der Mangel eines Kittes vom Brechungsindex des ordinären Strahls entgegen.

Weniger bedeutsam, aber immerhin erwähnenswert ist, daß bei dem hohen Brechungsindex des ordinären Strahls die Dispersionen von Flintglas, Kitt und Kristallamelle weit auseinander gehen. Da dabei nicht, wie bei den gewöhnlichen Nicols, nur eine Kittschicht, sondern zwei und außerdem noch die Kristallamelle in Betracht zu ziehen sind, so können immerhin farbige Nebenbilder durch Reflexionen auftreten. Die sphärische Aberration der Lamellenprismen ist wegen des höheren Brechungsexponenten ihrer Masse gegenüber dem bei einem Thompsonschen Prisma in Betracht kommenden kleinsten Index des extraordinären Strahls (1,658 gegen 1,485) etwas vergrößert, auch müssen theoretisch durch die Lamellen minimale Abweichungen von der gewöhnlichen chromatischen Differenz der sphärischen Aberration auftreten.

Außer den Lamellenprismen wäre an dieser Stelle noch des Polarisators zu gedenken, den v. Fedorow¹⁾ in Vorschlag gebracht hat. Dabei wird auch der ordinäre Strahl benutzt, die Einrichtung ist aber als Analysator nicht zu gebrauchen, weil die durchtretenden Strahlen eine starke Ablenkung erfahren.

Bei den von mir (Becher 1914²⁾) vor kurzem beschriebenen *Zerstreuungspolarisatoren* kann man je nach der

1) E. v. Fedorow, Referate in: Zeitschr. für Kristallogr. u. Mineral. 37. p. 413—414. 1902 und 40. p. 297—298. 1904.

2) Über eine auf die Struktur des Echinodermenskelettes begründete neue Methode zur Herstellung von polarisiertem Lichte, Zool. Anzeig. 44. p. 122—136. 17. April 1914.

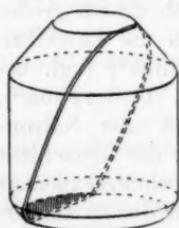


Fig. 13.
Feußner'sches
Prisma.

zur Homogenisierung angewendeten Massen entweder den ordinären oder den extraordinären Strahl durchtreten lassen. Auch diese Polarisatoren eignen sich indessen nicht als Analysatoren, weil sie — zumal bei Verwendung der ordinären Strahlen — etwas als Monochromator wirken und auch nicht so vollkommen durchsichtig sind wie ein Nicol. Des theoretischen Interesses wegen mag erwähnt werden, daß diese Zerstreuungspolarisatoren auch bei Benutzung des extraordinären Strahls frei von Astigmatismus sind, nicht nur weil sie Platten von außerordentlich geringer Dicke (etwa 2—3 mm) darstellen, sondern vor allem auch weil diese Polarisatoren nur flächenhafte Büschel durchlassen.

Man könnte auch an die Verwendung der bekannten Prismen von Séarmont, Rothon, Dove¹⁾ und Abbe²⁾ denken, die sowohl die ordinären als auch die extraordinären Strahlen durchtreten lassen, ihnen aber eine gewisse Divergenz

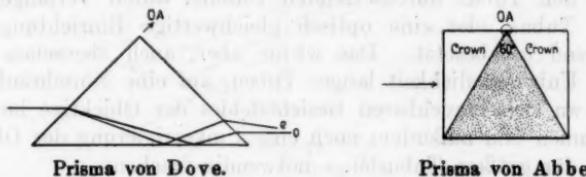


Fig. 14.

erteilen. Diese Divergenz genügt aber bei den beiden erstgenannten, die den ordinären Strahl ungebrochen durchtreten lassen, nicht, um die im Mikroskop auftretenden divergenten Strahlen (speziell des projizierenden Büschels) in ein rein polarisiertes Gesichtsfeld aufzunehmen. Beim Doveschen Prisma kann der Divergenzwinkel im Maximum bis auf 28° gebracht werden, es ist aber trotzdem als Analysator nicht brauchbar, da es Spiegelbilder liefert und dem Axialstrahl eine Versetzung erteilt. Beim Abbeschen Prisma ist die Divergenz von ordinärem und extraordinärem Strahl $11^\circ 40'$, dazu kommt, daß bei ihm der extraordinäre Strahl ungebrochen durchgeht und verwendet werden soll. Wollte man den ordinären Strahl benutzen, so würde das eine Knickung des Mikro-

1) Pogg. Ann. 122. p. 18, 456. 1864.

2) Journ. roy. micr. Soc. (2) 4. p. 1, 462. 1885.

skoptubus und eine Drehung des geknickten Teiles beim Drehen des Analysators notwendig machen.

Letzteres gilt auch für die Möglichkeit, bei einem Nicol den total reflektierten ordinären Strahl durch einen Ansatz austreten zu lassen, ungefähr so, wie das v. Ignatowsky¹⁾ zur Vermeidung der erwärmenden Wirkung des letzteren bei einem Projektionsnicol getan hat. Übrigens würde auch hier der total reflektierte Strahl Spiegelbilder liefern. Die Notwendigkeit, elliptische Polarisierung des Lichtes zu vermeiden, läßt auch die Möglichkeit, schräg austretende ordinäre Strahlen wieder durch Reflexion in Prismen in die Verlängerung der ursprünglichen Richtung zu bringen, als ziemlich ungünstig erscheinen.

Man könnte endlich auch daran denken, Analysatoren mit durchtretendem ordinärem Strahl aber zu engem Gesichtsfeld dadurch anwendbar zu machen, daß man die Divergenz der den Tubus durchsetzenden Büschel durch Verlängerung des Tubus oder eine optisch gleichwertige Einrichtung genügend herabgesetzt. Das würde aber, auch abgesehen von der Unbequemlichkeit langer Tuben, auf eine Einschränkung des an sich brauchbaren Gesichtsfeldes der Objektive herauskommen und außerdem noch eine Umkorrigierung der Objektive für größere Tubuslänge notwendig machen.

Wenn die Methode der Umgehung des Astigmatismus durch Benutzung des ordinären Strahls nicht vollauf befriedigt, so kann man andererseits den Weg einschlagen, zwar gewöhnlich astigmatische Analysatoren anzuwenden, den Astigmatismus aber nachträglich zu korrigieren.

2. Korrektur des Astigmatismus mit einer Zylinderlinse. Unvollkommenheit derselben, insbesondere bei Prismen mit schiefer Achsenlage. Vergrößerung der Bildverzerrung bei Verkleinerung des Astigmatismus. Diskussion der günstigsten Stellung einer Zylinderlinse. Unmöglichkeit, Astigmatismus und Bildverzerrung durch eine Zylinderlinse gleichzeitig zu heben. Anwendung von zwei Zylinderlinsen.

Das nächstliegendste Mittel, an das man unwillkürlich denkt, wenn es sich um die Beseitigung eines Astigmatismus handelt, ist dasjenige, dessen sich der Ophthalmologe zur

1) W. v. Ignatowsky, Ein neuer Nicol für Projektionszwecke, Ztschr. f. Instrumentenk. 30. p. 217 u. 218. 1910.

Korrektur des Astigmatismus des menschlichen Auges bedient, nämlich die Anwendung einer Zylinderlinse. Ich habe gleich zu Anfang die Idee erwogen, eine kleine Zylinderlinse direkt auf das Polarisationsprisma aufzusetzen oder dessen Oberfläche selbst schwach zylinderförmig abzurunden. Die Achse der Zylinderfläche müßte (man denke z. B. an ein Thompsonsches Prisma) senkrecht zur optischen Achse gestellt werden, dann wäre es bei entsprechender Wahl der Brennweite möglich, die geringere Konvergenz der in der Ebene der optischen Achse laufenden Strahlen durch die Zylinderlinse soweit zu steigern, daß der Bildpunkt bis an den von der Zylinderlinse unbeeinflußten Vereinigungspunkt der äquatorialen Strahlen herangeschoben würde (Fig. 15). Ebensogut könnte man natürlich

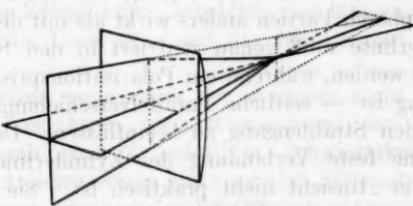


Fig. 15.

auch durch eine (um 90° anders liegende) konkave Zylinderlinse den näheren Brennpunkt bis zum Zusammenfallen mit dem entfernteren herausziehen.

Die Korrektur des Astigmatismus der Polarisationsprismen durch eine Zylinderlinse ist jedoch theoretisch eine sehr oberflächliche, der Astigmatismus doppeltbrechender Platten wird dabei als Astigmatismus schlechthin behandelt, ohne Rücksicht darauf, daß die Störung des Strahlenverlaufes hier einen ganz besonderen Charakter hat und von dem Astigmatismus einer Zylinderlinse sehr weit verschieden ist.

Wir brauchen nur an einige wenige Tatsachen zu erinnern, um das deutlich zu machen. Parallelle Strahlen durchsetzen eine doppeltbrechende Platte parallel, sie erfahren keine astigmatische Störung. Eine Zylinderlinse vereinigt senkrecht auffallende parallele Strahlen in einer Brennlinie: die Strahlen, die in einer die Zylinderachse enthaltenden Ebene verlaufen, treten ungebrochen durch (vereinigen sich also im Unendlichen)

wogegen die Strahlen einer dazu senkrechten Ebene in einem Brennpunkt vereinigt werden. Es besteht also ein Astigmatismus mit der astigmatischen Differenz zwischen dem endlichen Brennpunkt und dem Unendlichen. Für Strahlen gleicher Apertur stellt die astigmatische Differenz bei einer doppeltbrechenden Platte eine Konstante dar, bei der Zylinderlinse ist die astigmatische Differenz gleichzeitig noch von der Lage der Spitze des Büschels abhängig.

Schon aus diesen Tatsachen ergibt sich, daß sich ein Polarisationsprisma mit darüber gesetzter Zylinderlinse durchaus nicht etwa wie eine von ihrem Astigmatismus befreite Platte verhält. Bei einer Kristallplatte ist es gleichgültig, an welcher Stelle ein auffallendes Büschel die Platte durchsetzt, das ändert sich nach der Anbringung der Zylinderlinse, die in ihren peripheren Partien anders wirkt als mit den zentralen. Eine Zylinderlinse muß genau zentriert in den Strahlengang eingeschaltet werden, während ein Polarisationsprisma — wenn es breit genug ist — seitliche Parallelverschiebungen erfahren kann, ohne den Strahlengang zu beeinflussen. Daraus ergibt sich, daß eine feste Verbindung der Zylinderlinse mit dem Nicol in vieler Hinsicht nicht praktisch ist. Sie würde eine genaue Zentrierung der Nicoleinrichtung in bezug auf den Strahlengang des Mikroskopes notwendig machen, und es würde bei Mikroskopen mit derartig korrigiertem Astigmatismus unstatthaft sein, das Objektiv (horizontal gegen den Tubus zu verschieben, wie das vielfach an Stelle einer Zentrierung des Drehtisches geschieht.

Die Änderung der Zylinderlinsenwirkung bei lateraler Verschiebung tritt auch bei schrägen Büscheln zutage. Es ist nicht gleichgültig, ob ein Büschel von derselben Schräge eine Linse im Zentrum oder in seitlichen Partien durchsetzt. Die Entfernung vom Zentrum, in der die Büschel eines Gesichtsfeldes eine Zylinderlinse durchsetzen, hängt aber von ihrem Abstand von dem Projektionszentrum, also dem Schnittpunkt der Hauptstrahlen des Büschels ab. Im Mikroskopibus gehen diese Strahlen von der Mitte der Objektivaustrittspupille aus und daraus ergibt sich, daß eine bestimmte Zylinderlinse immer nur in einer Entfernung von der Objektivaustrittspupille eine beabsichtigte Wirkung genau erfüllen kann. Die Objektivaustrittspupille spielt für unsere Zylinderlinse offenbar dieselbe

Bolle wie der Augendrehungspunkt für die genaue Berechnung einer Brille, die eine exakte Korrektur eines Augenfehlers gewährleisten soll.

Wenn wir also voraussetzen, daß eine zu einer exakten Korrektur des Nicolastigmatismus geeignete Zylinderlinsenform gefunden wäre, so müßte diese Linse immer doch in einer bestimmten Entfernung von der Objektivaustrittspupille gebraucht werden. Nun liegen aber die Objektivaustrittspuppen bei den modernen Mikroskopen in ganz erheblich verschiedenen Höhen¹⁾, so daß eine Zylinderlinse danach nicht an einer bestimmten Stelle im Tubus angebracht werden dürfte, ihre Lage müßte vielmehr je nach dem angewendeten Objektiv derart verändert werden, daß stets der Abstand von der Austrittspupille derselbe wäre. Dieser Umstand erschwert die praktische Anwendung der Zylinderlinse erheblich und läßt es als fehlerhaft erscheinen, die Linse etwa auf das Nicol direkt aufsetzen zu wollen.

Aber selbst wenn diese Schwierigkeit nicht bestände, so würde die Korrektion des Astigmatismus der Polarisationsprismen durch eine Zylinderlinse Schwierigkeiten machen. Schon der Astigmatismus eines axialen Büschels verhält sich bei nicht ganz verschwindender Öffnung etwas anders als der zur Kompensation gebrauchte der Linse. Wir betrachten

1) Wenn bei einem Mikroskop die (bekanntlich nicht einheitliche) Begrenzung der Strahlenbüschel durch die im unteren Brennpunkt des Kondensators angebrachte Irisblende geschieht, so entwerfen Kondensator + Objektiv ein Bild dieser Blende in der hinteren Brennebene des Objektivs, und dieses Bild stellt die Austrittspupille des Objektivs dar. Die hintere Brennebene variiert aber in ihrer Höhenlage, wie ich aus Angaben über die optische Tubuslänge entnehme, bei verschiedenen Objektiven um mehr als 6 cm und, wenn man die allerschwächsten Systeme berücksichtigt, um über 11 cm. Allerdings zeigt eine genauere Betrachtung, daß bei schwachen Objektiven mit einem Gesichtsfeld, dessen Ausdehnung an Größe der Frontlinie nahekommt, die hintere Brennebene nicht mehr als Ort der Austrittspupille betrachtet werden kann; denn die vom hinteren Brennpunkt zu dem Objektivbilde ausgehenden Strahlen liegen nahe am inneren Rand der zeichnenden Büschel und stellen durchaus nicht mehr in bezug auf den Büschelquerschnitt „optische Schwerpunktlinien“ (Czapski), d. h. Hauptstrahlen, dar. Die Austrittspupille liegt vielmehr näher am Objektiv. Trotz dieser Einschränkung bleibt aber der Unterschied auch für die gebräuchlichsten Arbeitsobjektive ein sehr beträchtlicher.

oben die Horizontalverschiebungen im Hauptschnitt und der dazu senkrechten Ebene und fanden, daß letztere nicht einfach eine Vergrößerung der ersteren darstellen; es erhellt also, daß man die Gleichtartigkeit in jenen beiden Hauptebenen nicht einfach durch Vergrößerung mit Hilfe einer Linse erreichen kann. Das Wegfallen der astigmatischen Differenz für ein unendlich enges Büschel ist nicht gleichbedeutend mit punktueller Vereinigung aller Strahlen eines etwas weiter geöffneten Büschels bei der Korrektion. Das äußert sich nicht nur in den beiden Hauptebenen, sondern auch in den dazwischen liegenden Azimuten des Büschels. Der bei der Korrektur des axialen Büschels bleibende Fehlerrest ist immerhin ziemlich geringfügig, wenn es sich um ein Tompsonsches Nicol handelt, bei dem das Büschel doppeltsymmetrisch ist wie der Astigmatismus einer Zylinderlinse; es ist klar, daß die Korrektur erheblich unvollkommener werden muß, wenn wir es mit einer anderen Nicolform zu tun haben. Beim Thompsonschen Prisma stand die optische Achse horizontal, das axiale Büschel durchsetzte also eine äquatoriale Partie der Strahlenfläche, so daß das astigmatische Büschel zwei aufeinander senkrechte Brennlinien aufwies (vgl. Fig. 8 links), wenn dagegen ein Prisma mit Neigung der optischen Achse vorliegt, so werden — wie die rechte Hälfte der zitierten Figur demonstriert — die Brennlinien zwar in zwei aufeinander senkrechten Ebenen liegen, nicht aber beide auf dem Hauptstrahl des Büschels senkrecht stehen.

Berücksichtigen wir außer dem axialen Büschel auch den Astigmatismus längs schiefer Hauptstrahlen, so treten weitere Mängel einer Korrektion durch eine Zylinderlinse hervor. Diese Mängel sind auch dann am auffallendsten für Prismen mit geneigter Achsenlage, denn für diese ist die Änderung des Astigmatismus nur symmetrisch zum Hauptschnitt, nicht aber zu der dazu senkrechten Ebene, in der der Astigmatismus zum Beispiel vom einen Ende des Gesichtsfeldes bis zum anderen zu- oder abnehmen kann — ohne Symmetrie zu einem ausgezeichneten Wert in Richtung der Mikroskopachse. Da eine zentrierte Zylinderlinse immer eine für zwei senkrechte Hauptebenen symmetrische Wirkung hat, so ist die Inkongruenz, die sich bei einem Korrekturversuch im Bildfeld außerhalb der Achse zwischen dem Fehler und der Kompensationswirkung ergeben muß, ohne weiteres deutlich.

Für ein Thompsonsches Prisma bleibt auch außerhalb der Achse in der Änderung des Astigmatismus wenigstens die doppelte Symmetrie, die auch bei der Zylinderlinse vorhanden ist, gewahrt, so daß die Aussichten etwas besser sind; aber auch hier ist die Änderung des Astigmatismus von dem Öffnungswinkel des Büschels und dem Azimut seines Hauptstrahles eine andere als bei einer gewöhnlichen Zylinderlinse. Man könnte allerdings daran denken, durch Variation von Lage und Gestalt der Zylinderlinse eine Form derselben zu finden, in der sich die Änderung des Astigmatismus in den außeraxialen Teilen den von dem Prisma für jene Stellen gestellten Korrektionsansprüchen besser anpaßte. Dieses Ziel erscheint wenigstens für ein Thompsonsches Prisma nicht ganz aussichtslos. Schon oben wurde darauf hingewiesen, daß bei einem derartigen Bestreben die Austrittspupille des Objektivs eine ähnliche Rolle spielen müßte wie der Augendrehungspunkt bei der Berechnung astigmatischer Linsen für das blickende Auge.

Allerdings ist in unserem Falle die Sache erheblich komplizierter, als die Aufgabe bei dem modernen Brillenproblem. Zunächst ist zu beachten, daß die Austrittspupille des Objektivs nur dann Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen ist, wenn die korrigierende Linse unterhalb des Tubusnicols angebracht wird, d. h. wenn in das Nicol Büschel mit dem entgegengesetzten astigmatischen Fehler hineingeschickt werden sollen. In diesem Falle werden die mit dem Neigungswinkel φ in die Zylinderlinse eintretenden Strahlen in derselben eine Richtungsänderung erfahren, die je nach dem Azimut verschieden ist, und die Aufgabe muß dann darin bestehen, die Zylinderlinse so einzurichten, daß sie längs des Hauptstrahles mit dem Neigungswinkel φ einen Astigmatismus erzeugt, der gerade aufgehoben wird, wenn derselbe Strahl auf seinem weiteren Verlaufe mit der Neigung φ' das Polarisationsprisma durchsetzt.

Wenn umgekehrt die Korrektionslinse über dem Prisma angebracht wird, so erfahren die vom Zentrum der Austrittspupille ausgehenden Strahlen in dem Polarisationsprisma zwar keine Richtungsänderung, wohl aber eine Parallelversetzung, so daß die Hauptstrahlen, wenn sie auf die Zylinderlinse fallen, keinen einheitlichen Kreuzungspunkt mehr besitzen. An Stelle einer Berücksichtigung eines gemeinsamen Hauptstrahlen-

kreuzungspunktes haben wir also jeden Strahl und seinen Auffallpunkt auf die Linse gesondert zu berücksichtigen und diese nun bei gleichbleibender astigmatischer Wirkung auf das axiale Büschel so zu variieren, daß (unter Berücksichtigung der verschiedenen Azimute) jedem Neigungswinkel im Prisma und in der Zylinderlinse absolut gleiche aber umgekehrte astigmatische Differenzen entsprächen.

Bei der Konstruktion von astigmatischen Brillen mußte die Linse mit zylindrischer Wirkung so gestaltet werden, daß für den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen der Astigmatismus längs dieser Hauptstrahlen konstant blieb, weil der astigmatische Fehler des Auges bei seiner Drehung derselbe bleibt; in unserem Falle muß dahin gestrebt werden, daß — wenigstens in den beiden Hauptebenen — der Abfall oder der Zuwachs des Astigmatismus denselben Charakter annimmt wie bei dem Polarisationsprisma.

Obwohl außer den angedeuteten komplizierten Verhältnissen auch noch die Bildfeldkrümmung zu berücksichtigen wäre, so scheint mir trotzdem Aussicht für eine Lösung der angedeuteten Aufgabe zu bestehen, oder für eine gute Annäherung. Dabei würden die Erfahrungen der modernen Brillenoptik sicher von Nutzen sein. Wir müssen bedenken, daß wir ziemlich weitgehende Variationsmöglichkeiten besitzen, wir sind nicht auf planzyllindrische Gläser beschränkt, sondern könnten sphärozylindrische, sphäotorische oder torotorische Linsen mit Zylinderwirkung anwenden, besonders dürften die letztgenannten mit der relativen Selbständigkeit, die sie für die „Durchbiegung“ in den beiden Hauptebenen gestatten, gute Aussichten bieten. Natürlich wäre auch die Vertauschung von Vorder- und Hinterfläche zu versuchen. In unserem Falle kommt als weitere Variable der Abstand der Zylinderlinse von der Austrittspupille (bzw. vom Bild) hinzu, die bei dem Brillenproblem als Konstante behandelt werden mußte.

Die große Mühe, die die Berechnung soleher zu genauerer Korrektur geeigneter Zylinderlinsen machen würde, scheint mir indessen ziemlich zwecklos, nicht nur wegen der oben erwähnten verschiedenen Höhenlage der Objektivaustrittspupille, sondern auch aus verschiedenen anderen Gründen. Zunächst ist zu bedenken, daß die Herstellung von Linsen mit mehreren torischen Flächen umständlich ist, und daß eine den

Korrektionsansprüchen genügende Linse wahrscheinlich auf Grund der durch andere Momente bestimmten Radien eine endliche Brennweite in beiden Hauptebenen erhalten würde. Wenn das aber der Fall wäre, so würden die Objektive bei Einhaltung der üblichen mechanischen Tubuslänge für einen anderen Konvergenzgrad der zeichnenden Büschel, also für eine andere Objektweite gebraucht werden, für die die jetzt gebräuchlichen Objektive nicht korrigiert sind. Es müßten also etwas umkorrigierte Objektive für die Polarisationsmikroskope hergestellt werden.

Viel bedenklicher und von wirklich entscheidender Bedeutung ist aber ein anderer Umstand, nämlich die Tatsache, daß die Korrektur des Astigmatismus mit Hilfe von Zylinderlinsen immer mehr oder weniger auf Kosten der Orthoskopie geht. Unsere Fig. 16 erläutert, daß eine Zylinderlinse, genau so wie das Nicol selbst, nicht nur auf die zeichnenden, sondern auch auf das große, das Gesichtsfeld projizierende Büschel wirkt. Die Spitze dieses Büschels und die Schnittpunkte der punktierenden Büschel liegen aber auf verschiedenen Seiten der Zylinderlinse und so kommt es, daß die Linse, die den Astigmatismus korrigiert, gleichzeitig die Bildverzerrung vergrößert. Verfolgen wir in der linken Seite von Fig. 5, die uns die Verhältnisse der Hauptschnittebene des Nicols wiedergibt, einen Randstrahl des axialen punktierenden Büschels, so erhält derselbe eine Parallelversetzung von der Achse fort, die stärker ist als die entsprechende Versetzung des korrespondierenden Strahls in der dazu senkrechten Ebene (rechte Hälfte der Zeichnung). Eine positive Zylinderlinse muß also so gesetzt werden, daß ihr linsenförmiger Querschnitt in die Hauptschnittrichtung fällt und den weiter abgeschiedenen Strahl durch Verstärkung seiner Neigung zur Achse wieder heranholt, während der Partner in der dazu senkrechten Ebene durch den planparallelen Querschnitt der Linse geht und fast nicht beeinflußt wird. Nun ist aber der Randstrahl des das Gesichtsfeld projizierenden Büschels wegen seiner entgegengesetzten Neigung zur Achse im Polarisationsprisma näher an diese heranversetzt worden (als in der anderen Hauptebene), und diese zu große Annäherung an die Achse wird durch die Linsenwirkung noch verstärkt, so daß tatsächlich eine Vergrößerung der Bildverzerrung eintritt (Fig. 17).

Dieser Übelstand tritt bei der Anwendung einer negativen Linse in ganz entsprechender Weise auf und bleibt auch in demselben Sinne bestehen, wenn die Zylinderlinse über oder unter dem Polarisationsprisma angeordnet wird.

Im allgemeinen verstärkt also eine zur Korrektur des Astigmatismus angewendete Zylinderlinse die Bildverzerrung, und diese schädigende Wirkung ist recht unangenehm; denn

die Bildverzerrung ist — in
Anbetracht der großen Öffnung
des das Gesichtsfeld projizie-
renden Hauptstrahlenbüschels —

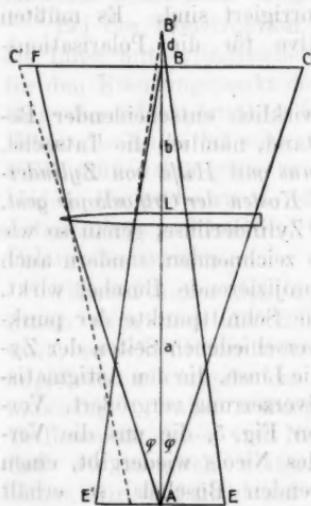


Fig. 16.

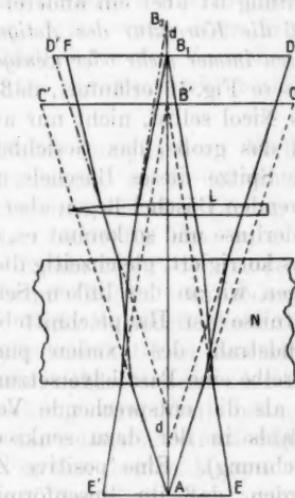


Fig. 17.

graduell noch bedeutender als der allerdings noch wichtigere Astigmatismus. Es lohnt sich, die Frage zu erörtern, ob es nicht möglich ist, eine Stelle für die Zylinderlinse zu finden, an der sie die Bildverzerrung bei gleichzeitiger Hebung des Astigmatismus mit beseitigt.

Zunächst ist zu bedenken, daß die Verzerrung tatsächlich vermindert werden könnte, wenn man die Zylinderlinse nicht hinter, sondern vor der Austrittspupille des Objektivs anbringen könnte. Das ist jedoch aus technischen Gründen

ausgeschlossen, da dann jedes Objektiv mit Zylinderlinse ausgerüstet werden müßte, und außerdem eine mit der Drehung des Tubusnicols harmonierende Drehung der Linse kaum zu bewerkstelligen wäre. Außerdem wäre eine wirkliche Hebung der Anorthoskopie durch eine Zylinderlinse auch bei völlig freier Lage der Objektivaustrittspupille nicht möglich, denn es ist klar, daß die Beseitigung der verzeichneten Wirkung des Nicols auf die Hebung des virtuellen Astigmatismus der rückwärts verlängerten Hauptstrahlen herauslaufen würde. Dieser Astigmatismus ist aber — wenn wir von der Öffnung der Büschel absehen — von derselben Größe wie der Astigmatismus der zeichnenden Büschel, deren Brennlinien aber in einem ganz anderen Abstand von der Zylinderlinse liegen. Nun sahen wir aber schon, daß die Wirkung einer Zylinderlinse nicht nur von ihren Krümmungen und ihrem Brechungsindex, sondern gleichzeitig auch von ihrer Entfernung von den zu vereinigenden beiden Brennlinien abhängt. *Man kann also mit einer Zylinderlinse ohne weitere Hilfsmittel niemals dieselbe astigmatische Differenz in verschiedenen Entfernungen heben.*

Es ist vielleicht von Interesse, die vorliegenden Verhältnisse noch präziser durch eine Formel auszudrücken. Wenn in Fig. 16 d die astigmatische Differenz des Nicols ist, so daß die Zylinderlinse diese Differenz mit umgekehrtem Vorzeichen in dem zeichnenden Strahlenbündel $E'AEB'$ in B mitteilen muß, so gilt nach der bei der schwachen Zylinderlinse für den einen Hauptschnitt anwendbaren elementaren Linsenformel die Gleichung

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Da Objektpunkt und Bildpunkt auf derselben Seite liegen, so ist a mit negativem Wert eingesetzt. Es ergibt sich danach für f :

$$f = \frac{a \cdot b}{a - b} = \frac{a \cdot b}{d},$$

$$f = \frac{b(b+d)}{d}.$$

Bedeutet nun A den Mittelpunkt der Objektivaustrittspupille, so wird ein unter dem Winkel φ ausgehender projizierender Hauptstrahl in der einen Hauptebene der Zylinder-

linse ziemlich ungestört nach C gelangen, in der dazu senkrechten Ebene aber durch die Linsenwirkung nach F abgelenkt werden, also von A' herzukommen scheinen. Es ergibt sich danach eine Verzeichnung: $V = BF/BC$. Berücksichtigt man, daß FBC die Bildebene des Objektivs und daher AB die optische Tubuslänge T darstellt, so ergibt sich unter Anwendung der in der Figur angeschriebenen Bezeichnungen φ, φ', a' und e :

$$V = \frac{BF}{BC} = \frac{(T+e) \operatorname{tg} \varphi'}{T \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(T+e)}{T \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{a' \cdot \operatorname{tg} \varphi}{a'+e} = \frac{T+e}{T} \cdot \frac{a'}{a'+e}.$$

Nun ist analog wie oben:

$$f = \frac{a'(a'+e)}{e} \text{ also } \frac{1}{a'+e} = \frac{a'}{ef}.$$

Daraus folgt für V :

$$V = \frac{a'^2}{f} \cdot \frac{T+e}{T \cdot e} = \frac{a'^2}{f} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{e} \right),$$

die endlich

läßt sich mit Hilfe der Gleichung

$$f = \frac{a'(a'+e)}{e}$$

eliminieren:

$$e \cdot f = a'^2 + e \cdot a' \text{ also } e(f-a') = a'^2 \text{ oder } e = \frac{a'^2}{f-a'}$$

und endlich

$$\frac{1}{e} = \frac{f-a'}{a'^2} = \frac{f}{a'^2} - \frac{1}{a'};$$

Einsetzung dieses Wertes ergibt:

$$V = \frac{a'^2}{f} \left(\frac{1}{T} + \frac{f}{a'^2} - \frac{1}{a'} \right) = \frac{a'^2}{f \cdot T} + 1 - \frac{a'}{f}$$

oder

$$V = 1 + \frac{a'}{f} \left(\frac{a'}{T} - 1 \right).$$

Diese Formel läßt bereits einige wichtige Verhältnisse hervortreten. Es herrscht Orthoskopie (in den 2 Hauptebenen), wenn $BD=BC$, also wenn $V=1$ wird, oder wenn

$$\frac{a'}{f} \left(\frac{a'}{T} - 1 \right) = 0$$

wird. Das tritt ein, wenn entweder $a'=0$ ist, d. h. wenn die Zylinderlinse in der Austrittspupille des Objektivs liegt, oder

wenn $a' = T$ ist, d. h. wenn die Linse direkt in der Objektivbildebene angebracht wäre.

Letztere Möglichkeit wird dadurch illusorisch, daß dann eine Korrektur des Astigmatismus unmöglich wird, die erste ist praktisch kaum realisierbar, weil die Austrittspupillen verschiedener Objektive in verschiedener Höhe liegen.

Auf Grund der Beziehung $a' = T - b$ läßt sich auch b an Stelle von a' in die Formel einführen. Es ergibt sich

$$V = 1 + \frac{T-b}{f} \cdot \left(\frac{T-b}{T} - 1 \right) = 1 + \frac{T-b}{f} \cdot \left(-\frac{b}{T} \right)$$

und endlich

$$V = 1 + \frac{b}{f} \left(\frac{b}{T} - 1 \right).$$

Die Formel für V ist also für b genau so gebaut wie für a' ; d. h. es müssen die Werte von V in bezug auf die Abstände der Zylinderlinse von A und B symmetrisch sein, vorausgesetzt, daß f konstant ist. Nun muß aber in unserem Falle f immer in Rücksicht auf den Astigmatismus abhängig von b gewählt werden; es ist also zweckmäßig, für f den oben gefundenen Ausdruck $b(b+d)/d$ einzusetzen, der die Hebung des Astigmatismus garantiert. Dann ergibt sich:

$$V = 1 + \frac{d}{b+d} \left(\frac{b}{T} - 1 \right) = \frac{T \cdot b + T \cdot d + b \cdot d - T \cdot d}{(b+d) T}$$

also

$$V = \frac{b(T+d)}{T(b+d)}.$$

Es ist bemerkenswert, daß wir zu derselben Formel gekommen wären, wenn wir die Verzeichnung eines Strahlbüschels bestimmt hätten, dessen Spitze in B und dessen Projektionsebene in AE lag. Denn wir hätten dann — genau so wie sich oben für das von A ausgehende Hauptstrahlbündel der Wert $V = \frac{a'(T+e)}{T(a'+e)}$ ergab — die Verzeichnung $V = \frac{b(T+d)}{T(b+d)}$ erhalten. Diese Gleichheit der Verzeichnung für die FBC - und die EA -Ebene kann auch hier wieder auf die Vertauschbarkeit der Wertepaare $a'e$ und bd zurückgeführt werden, die schon vorhin bei den Verzeichnungsformeln hervortrat. Denn wenn dort bei konstantem f eine Vertauschung der Werte a' und e durch b und d keine Änderung von V

bedingte, so konnte das auch unter Voraussetzung einer feststehenden Linse dahin gedeutet werden, daß sich dieselbe Verzeichnung ergibt sowohl bei Projektion aus der Entfernung b als auch aus der Entfernung a' von der anderen Seite.

Die absolute Größe (L) der Verzeichnung für einen Strahl bestimmter Neigung wird nach unserer Figur durch $BC - BF$ angegeben; BC ist gleich $T \cdot \operatorname{tg} \varphi$, unsere Formel für V ergibt demnach (für BF) $BF = \frac{b \cdot (T + d)}{b + d} \cdot \operatorname{tg} \varphi$; also ergibt sich für L :

$$L = BC - BD = \operatorname{tg} \varphi \left(T - \frac{b(T + d)}{b + d} \right) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{T \cdot d - b \cdot d}{b + d}$$

oder

$$L = \frac{d \cdot (T - b)}{b + d} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{d \cdot a'}{b + d} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Berücksichtigen wir, daß die durch das Polarisationsprisma bewirkte absolute Verzeichnung (Differenz der Horizontalversetzungen) gleich $d \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ist, so ergibt sich in den beiden senkrechten Hauptebenen eine Verzeichnung von:

$$d \operatorname{tg} \varphi + d \cdot \frac{(T - b)}{b + d} \operatorname{tg} \varphi = \left(1 + \frac{T - b}{b + d} \right) \cdot d \operatorname{tg} \varphi = \frac{T + d}{b + d} \cdot d \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Verzeichnung reduziert sich auf den allein vom Polarisationsprisma herrührenden Wert $d \cdot \operatorname{tg} \varphi$, wenn $b = T$ wird, d. h. wenn die Linse in die Austrittspupille des Objektivs gesetzt wird. Noch kleiner würde die Gesamtverzeichnung werden, wenn $b > T$ gemacht werden könnte, so daß $\frac{T - b}{b + d}$ negativ würde. Dann würde die Zylinderlinse eine Verringerung der Verzeichnung statt einer Vergrößerung bewirken. Ganz beseitigt könnte aber auch auf diesem Wege die Gesamtverzeichnung nicht werden, denn dazu müßte $\frac{T - b}{b + d} = -1$ werden, was deshalb unmöglich ist, weil der absolute Wert des Zählers ($b - T$) stets kleiner als der des Nenners bleibt, es sei denn, daß b unendlich groß würde.

Praktisch ist es aber, wie wir bereits erkannten, schon so gut wie unausführbar, die Zylinderlinse in die Austrittspupille zu setzen, noch aussichtsloser muß es aber erscheinen, b größer als T zu machen, d. h. die Zylinderlinse objektivwärts hinter der Objektiveintrittspupille anbringen zu wollen, denn das würde darauf hinauslaufen, daß in jedes Objektiv eine be-

sondere Zylinderlinse eingebaut würde. Diese Linse müßte außerdem noch herausnehmbar sein, um das Objektiv auch bei Ausschaltung des Tubusanalysators gebrauchen zu können und obendrein auch noch um die Mikroskopachse drehbar, um je nach den verschiedenen Stellungen des Analysators eingestellt werden zu können. Endlich kommt hinzu, daß bei der Berechnung der so angeordneten Zylinderlinse die Wirkung der vorgesetzten letzten Linsen des Objektivs mit in Betracht zu ziehen wäre.

Praktisch kommen derartige Anordnungen natürlich gar nicht in Betracht, und es bleibt dabei, daß eine Zylinderlinse in dem Raum zwischen Objektiv und Okular die Bildverzerrung zugunsten des zu korrigierenden Astigmatismus vergrößert. Immerhin ist es empfehlenswert, die Zylinderlinse dicht über das Objektiv zu setzen, um die Vergrößerung der Verzeichnung möglichst klein zu machen.

An Stelle der Objektivaustrittspupille kann man zu diesem Zwecke auch einen anderen Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen nehmen. Es kommt dazu aber nur noch die *AP* des ganzen Mikroskops in Betracht. Diese Pupille liegt aber beim Gebrauch verschiedener Objektive an verschiedenen Stellen, so daß es unmöglich ist, den Vorteil exakt auszunutzen. Trotzdem ist die Möglichkeit, die Zylinderlinse an der Augenseite des Okulars anzubringen, von theoretischem Interesse, weil hier für besondere Fälle sogar die Möglichkeit entsteht, Astigmatismus und Verzeichnung gleichzeitig zu heben. Es liegt das daran, daß für diese Stelle die astigmatische Differenz der zeichnenden Büschel und des Kreuzungspunktes der Hauptstrahlen nicht gleich sind, sondern unter dem Einfluß der sich entsprechend den Entfernungswerten verschiedene äußernden Wirkung des Okulars verschiedene Werte erhalten. Da nun die Zylinderlinse selbst auch verschiedene Entfernungswerte vom Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen (*AP*) und der Schnittebene der zeichnenden Strahlen hat, und an diesen Stellen verschieden stark ausgleichend wirkt, so kann man theoretisch die Möglichkeit eines Ausgleichs an beiden Stellen erhoffen. In der Tat zeigt schon eine einfache Überlegung, daß eine Zylinderlinse, die zwischen der *AP* des Mikroskops und dem Okular liegt, bei Hebung des Astigmatismus vermindernd auf die Bildverzerrung einwirken muß.

Ein genaueres Urteil gestattet folgende Überlegung. Wenn die eine Brennlinie eines zeichnenden Büschels in der Fokalebene des Okulars liegt (das die Äquivalentbrennweite F haben mag), so wird die andere Brennlinie um die astigmatische Differenz d davon entfernt sein. Sie hat also von einer dem Okular äquivalenten Linse die Entfernung $F - d$ (oder $F + d$), und wird demnach nicht wie die andere virtuell im Unendlichen, sondern in der Entfernung $F(F-d)/d$ (vom Ort der äquivalenten Linse) abgebildet. Dieser Bildpunkt muß aber, wenn der Astigmatismus gehoben werden soll, durch den sammelnden Meridian der Zylinderlinse auch ins Unendliche geschoben werden, und das tritt ein, wenn der Punkt in der Brennweite der Zylinderlinse liegt. Bedeutet s den Abstand der Zylinderlinse vom Ort der Okularäquivalentlinse, so muß demnach die Brennweite f der Zylinderlinse den Wert $s + F(F-d)/d$ haben, wenn der Astigmatismus schwinden soll. Eine solehe Zylinderlinse wirkt aber in der einen Hauptebene vergrößernd, und zwar beträgt die Vergrößerung

$$250/f = \frac{d \cdot 250}{F^2 - d(F-s)}.$$

Die in der Bildverzerrung zum Ausdruck kommende Vergrößerung eines Durchmessers des Gesichtsfeldes beträgt aber nach p. 328 $V = (T+d)/T^1$ also ergibt sich für gleichzeitige Hebung von Astigmatismus und Verzerrung die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d \cdot 250}{F^2 - d(F-s)} = \frac{T+d}{T},$$

wobei man für s noch $k - F$ einführen kann, worin k den Abstand der Zylinderlinse von der Brennebene des Okulars bedeuten soll. Dann lautet die Formel:

$$\frac{d \cdot 250}{F^2 + d(k - zF)} = \frac{T+d}{T}.$$

Bedenkt man, daß die Augenlinse des Okulars etwa 20 mm über der vorderen Brennebene desselben liegt und daß die Zylinderlinse noch unterhalb der Austrittspupille liegen muß, die ihrerseits etwa 5—10 mm über der Augenlinse liegt, so ergibt sich, daß k zwischen 20—30 mm verändert werden könnte, wenigstens im günstigsten Falle. Diese Variabilität

1) Im Objektivbild. Im Okularbild bleibt das Verhältnis dasselbe.

genügt aber nicht entfernt, um den Bruch der linken Seite für jedes bei gebräuchlichen Okularen vorkommende F gleich $(T+d)/T$ zu machen, denn $(T+d)/T$ ist bei der relativen Kleinheit von d (etwa 3 mm) gegen T (etwa 125—190 mm) fast gleich 1, so daß rechts $F^2 - 6F + 3$ (20—30) gleich 750 werden müßte, was offenbar nur für ein mittleres Okular von etwas weniger als 30 mm Brennweite zutrifft.

Auch bei Anbringung der Zylinderlinse über dem Okular ist daher gleichzeitige Beseitigung von Astigmatismus und Verzeichnung nicht allgemein zu erreichen, nicht einmal, wenn man davon absieht, daß die Verschiedenheit der optischen Tubuslänge für verschiedene Objektive das Ziel an sich schon unerreichbar macht.

Im praktischen Mikroskopbau würde man wohl nie dazu übergegangen sein, die korrigierende Zylinderlinse über dem Okular anzubringen. Die Okulare würden dadurch in ihrer Brauchbarkeit beeinträchtigt, man müßte extra Okulare für die Beobachtung im nichtpolarisierten Licht haben. Außerdem müßte man das Okular mitdrehen, wenn das Tubusnicol gedreht würde. Das läßt sich aber kaum in bequemer Weise einrichten.

Durch Aufwand größerer optischer Mittel, durch Kombination einer Zylinderlinse und einer sphärischen Linse ließe sich, wie beim Okular so auch bei Anbringung im Tubus, etwas mehr erreichen. Auch könnte man daran denken, zwei Zylinderlinsen anzubringen, und zwar so, daß die eine in der Austrittspupille des Objektivs läge und dementsprechend das Gesichtsfeld projizierende Büschel, also die Verzeichnung, nicht veränderte, aber den Astigmatismus beseitigte bzw. so überkorrigierte, daß er sich aufhebt mit der astigmatischen Wirkung einer zweiten (zerstreuenden) Zylinderlinse, die kurz vor der Bildebene des Objektivs postiert werden müßte und die Verzeichnung zu heben hätte. Man wird jedoch in der Praxis auch zu zwei Zylinderlinsen oder anderen komplizierten optischen Mitteln nicht gern greifen, denn die damit erzielten Korrekturen nehmen nur auf das axiale Büschel Rücksicht. Im allgemeinen wird man im Mikroskop die Anwendung mehrerer Zylinderlinsen zu vermeiden suchen. Glücklicherweise besteht auch, wie wir sehen werden, die Möglichkeit, sowohl Astigmatismus als auch die Bildverzerrung im Mikroskop in viel einfacherer und unbedenklicherer Weise zu heben.

Zusammenfassend können wir über die Korrektur des Astigmatismus durch Zylinderlinsen sagen, daß sie schon für ein axiales Büschel nicht vollkommen ist, daß sie für schiefe Büschel eine Verschlechterung erleidet, deren Beseitigung ein eigenes kompliziertes Problem darstellt, daß fernerhin die Korrektur des Astigmatismus im allgemeinen mit einer Vergrößerung der Bildverzerrung Hand in Hand geht und daß die Möglichkeit, die Bildverzerrung nicht zu vergrößern oder sie zu verringern, sich aus andern im Bau des Mikroskops gegebenen Gründen nicht durchführen läßt.

3. Aufhebung des Astigmatismus und der Bildverzerrung durch Verwendung einer planparallelen Platte einer Substanz von positiver Doppelbrechung.

Es scheint unmöglich, den Astigmatismus eines Polarisationsprismas durch eine anders orientierte Kalkspatplatte zu heben; denn um eine erneute Zerlegung des Lichtes zu vermeiden, ist man darauf beschränkt, entweder die Hauptschnitte parallel oder senkrecht zueinander zu orientieren. Im ersten Falle würde der Astigmatismus einfach verstärkt werden, im letzteren würde das Licht nicht als extraordinärer Strahl durchtreten, sondern die zweite Platte nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz durchdringen, wobei natürlich das axiale Bündel gar keine weitere zur Korrektion verwendbare astigmatische Deformation erfahren würde.

Dagegen ist es möglich, durch Verwendung einer Platte aus positiv doppeltbrechender Substanz eine Korrektur des Nicolastigmatismus zu erreichen. Wenn die Hauptschnitte im Polarisationsprisma und in der positiven Platte gleiche Richtung haben, so werden die extraordinären Strahlen des Analytors auch die Korrektionsplatte extraordinär durchsetzen. Nun ist aber leicht einzusehen, daß die Wellenfläche des Kalkspats (außer an den Polen) an allen Stellen in der Hauptschnittebene einen kleineren Krümmungsradius besitzt als senkrecht dazu, während es bei der Strahlenfläche des positiven Kristalls gerade umgekehrt ist. Die astigmatische Wirkung muß also eine entgegengesetzte sein, so daß an eine Korrektion auf dieser Grundlage gedacht werden kann.

Wenn r_m und r_b die Krümmungsradien in der meridionalen Hauptschnitt- bzw. der Breitenkreisebene sind, so ist, wie wir

fanden, die astigmatische Differenz für ein die Platte senkrecht durchsetzendes Büschel $d = D(r_m - r_b)$. Der Ausdruck in der Klammer ist für eine negativ doppelbrechende Platte negativ, für eine positive positiv. Die astigmatischen Wirkungen einer negativen Platte, also z. B. eines Analysators und einer positiven Platte werden sich also aufheben, wenn:

$$D(r_m - r_b) + D'(r_m' - r_b') = 0,$$

wobei die gestrichenen Buchstaben sich auf die Korrektionsplatte beziehen und D die Dicke bedeutet.

Es ist bemerkenswert, daß nach dieser Formel für die Korrektion nicht nur die Wahl von D' , sondern auch die von der Schrägen der optischen Achse abhängige Differenz $r_m' - r_b'$ als Variable zur Verfügung zu stehen scheint. Das ist indessen in Wirklichkeit nicht der Fall; denn wir müssen bedenken, daß unsere Formel nur die Hebung der astigmatischen Differenz für den axialen Strahl garantiert, daß aber die Rücksicht auf den Gebrauch körperlicher Büschel uns zwingt, die optische Achse in der Korrektionsplatte parallel zu der Achse im Analysator zu legen. Nur unter dieser Bedingung fallen nämlich alle Hauptschnitte zusammen, so daß die Garantie gegeben ist, daß alle Strahlen, die den Analysator durchsetzt haben, auch unzerlegt durch die Korrektionsplatte gehen.

Wenn die Achsen nur in einem gemeinsamen Hauptschnitt liegen, so würde nur in dieser Ebene unzerlegte Übernahme der Strahlen aus dem Analysator in die Platte stattfinden. Auch würde, wenn etwa die Achsen in derselben Ebene nach verschiedenen Seiten des Einfallsloches wiesen, die seitliche Versetzung des Axialstrahls in der Platte noch verstärkt werden, und die Änderung des Astigmatismus seitlich vom Axialstrahl würde sich nicht nur nicht entsprechen, sondern überhaupt in entgegengesetztem Sinne stattfinden. Die Korrektion würde also in seitlichen Partien des Gesichtsfeldes sehr schnell an Güte abnehmen.

Die besten Aussichten böten sich überhaupt für die Korrektion eines Thomsonschen Prismas. Dann hätte auch in der Korrektionsplatte die optische Achse horizontal zu liegen. Dieser Fall ist durch unsere Fig. 18 verdeutlicht, deren linke und rechte Hälften wieder den Strahlenverlauf in den aufeinander senkrecht stehenden Hauptebenen darstellen und

gegeneinander um 90° aufgeklappt zu denken sind. Die untere Platte stellt den Analysator, die obere die Korrektionsplatte dar. Die Dicken der Platten verhalten sich umgekehrt wie die ebenfalls anschaulich dargestellten Differenzen der Krümmungsradien. Die Parallelversetzungen eines Strahles in der Korrekturplatte geschieht immer nach der entgegengesetzten Seite wie im Analysator, so daß schließlich wieder eine homozentrische Vereinigung zustande kommt.

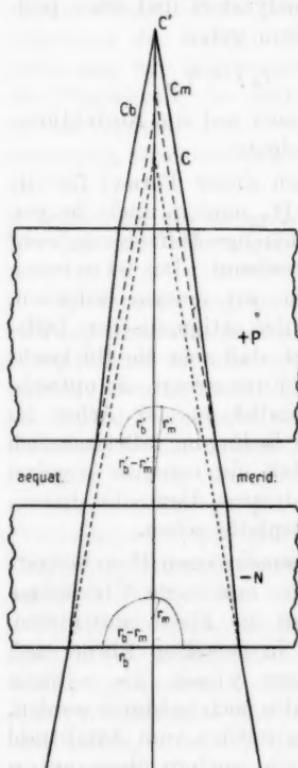


Fig. 18.

Auch für die seitlichen Teile des Gesichtsfeldes wäre die Korrektur eine annehmbare. In der den Äquator der Wellenflächen enthaltenden Hauptebene bleibt der Astigmatismus der Wellenflächen an sich konstant (wir sehen hier von dem zunehmenden Astigmatismus der Grenzflächenübergänge ab) und erfährt nur durch die Verlängerung des Weges, die ein schräger Strahl nimmt, eine entsprechende Vergrößerung, die aber in Analysator und Korrektion nahezu, wenn auch nicht völlig gleich¹⁾ ist. In der meridionalen Hauptebene ist die Übereinstimmung in der Änderung der astigmatischen Differenz weniger gut.

Ein großer Vorteil der in Rede stehenden Art der Korrektur

gegenüber der Benutzung einer Zylinderlinse würde in der wenigstens angennäherten Aufhebung der Bildverzerrung bestehen. Die astigmatische Differenz, die eine Platte einem Büschel erteilt, ist gleich, unbekümmert darum, ob das Büschel seine Spitze auf der einen oder anderen Seite hat. Die astigmatischen Differenzen von Analysator und Korrektionsplatte

1) Weil der Strahl in den beiden Platten nicht dieselbe Neigung hat.

werden sich also für das Gesichtsfeld projizierende Büschel genau so aufheben, wie für das axiale, zeichnende Büschel. Genau genommen ist natürlich zu berücksichtigen, daß das projizierende Büschel etwas größere Öffnung besitzt, so daß die Unvollkommenheit der Korrektion in seitlichen Partien beginnt, sich geltend zu machen. In der ersten Annäherung, mit der wir immer die Bildverzerrung behandelt haben, wäre dieselbe jedoch tatsächlich gleichzeitig mit dem Astigmatismus gehoben.

Leider scheitert die praktische Anwendbarkeit des besprochenen Korrektionsmodus an der relativ geringen Stärke der positiven Doppelbrechung des in Betracht kommenden Materials gegenüber dem stark doppeltbrechenden Kalkspat. Als Material kommt nämlich kaum etwas anderes als Quarz in Betracht. Für Quarz wird aber $r_m - r_b$, wenn die Achse parallel der Fläche der Platte liegt nach der Formel $1/\epsilon - \epsilon/\omega^2 = 0,0076$, wenn wir die Werte $\epsilon = 1,55836$ und $\omega = 1,54425$ für n_D (15) zugrunde legen. Für Kalkspat ergibt sich aber der entsprechende Wert zu 0,13236; dieser Wert ist mehr als 17 mal größer als beim Quarz, so daß nach unserer Formel umgekehrt die Dicke des korrigierenden Quarzblockes mehr als 17 mal dicker sein müßte, als das Thompsonsche Polarisationsprisma. Wenn letzteres eine Länge von 2,5 cm hat, so müßte demnach die korrigierende Quarzplatte über 42,5 cm dick werden.

Damit ist ersichtlich, daß die Methode praktisch völlig ausschaltet, auch wenn man davon absieht, daß die gewaltige Quarzsäule eine starke sphärische Aberration erzeugen würde.

4. Verminderung des Astigmatismus und der Bildverzerrung durch Verlängerung des Mikroskopibus bzw. der Objektivbildweite.

Ein Mittel zur Verringerung, wenn auch nicht zur Beseitigung des astigmatischen und anorthoskopischen Fehlers, besteht in der Verlängerung des Tubus, oder, präziser ausgedrückt, in der Vergrößerung der optischen Tubuslänge. Die astigmatische Differenz wird dabei zwar nicht verringert, denn sie ist, wie mehrfach hervorgehoben wurde, unabhängig vom Abstand der Büschelspitze von dem Analysator; aber die Länge der Brennlinien, zu denen die beiden Punktbilder ausgezogen sind, werden mit abnehmender Winkelöffnung der

Büschen proportional verkleinert. Bedenken wir aber, daß ohne Okularvergrößerung der Gesichtswinkel, unter dem eine der Brennlinien (aus deutlicher Sehweite) erscheint, nach unserer obigen Rechnung 2,75 Minuten, bei Anwendung einer 4maligen Okularvergrößerung also 11' beträgt, so erhellt, daß man die optische Tubuslänge schon 11 mal verlängern müßte, selbst wenn man sich auf den Gebrauch schwächster Okulare mit höchstens 4maliger Vergrößerung (Zeiß 2, Leitz 0) beschränkte. Durch Anwendung von Spiegeln, Prismentuben oder dergleichen ließe sich die äußere Länge dabei verringern, doch wäre, wenn man nicht dafür sorgte, daß der ganze spiegelnde Apparat mit dem Nicol drehbar wäre, so daß immer alle Spiegelflächen der Schwingungsrichtung parallel liegen könnten, elliptische Polarisierung des Lichtes zu befürchten. Praktisch würde die ganze Einrichtung sehr schwerfällig werden.

An dieser Stelle mag noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die Geringfügigkeit des astigmatischen Fehlers beim Okularaufsatznicol, wie schon oben genauer besprochen wurde, abgesehen von dem Fortfall einer Vergroßerung, mit der sehr geringen Öffnung der diesen Analysator durchsetzenden Büschel zusammenhängt.

5. Vollständige Beseitigung des Astigmatismus und der Bildverzerrung durch Herstellung von telezentrischem Strahlengang im Mikroskop.

Das Ziel einer radikalen Beseitigung des Astigmatismus muß nach dem Vorhergehenden offenbar darin bestehen, die Konvergenz der zeichnenden Büschel ganz aufzuheben, ihre Öffnung völlig gleich 0 zu machen. Man braucht trotz Anwendung gewöhnlicher astigmatischer Analysatoren den Fehler gar nicht auftreten zu lassen, sondern kann den Astigmatismus von vornherein vollkommen vermeiden, wenn man jedes zu einem Objekt- und Bildpunkt zugehörige Büschel in ein paralleles Strahlenbündel verwandelt und als solches durch den Analysator sendet.

Jeder Strahl, der in eine planparallele, optisch einachsige Platte einfällt, tritt nämlich wieder parallel zu sich selbst aus, unbekümmert darum, daß er, wenn es sich um einen extraordinären Strahl handelt, nicht nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz verläuft und gewöhnlich aus der Einfalls-

ebene herausgebrochen wird. Die Konstruktion des gebrochenen Strahls an der Einfallsfläche ist nämlich an der parallelen Austrittsfläche genau umzukehren, so daß trotz der Strahlversetzung die Richtung beim Ein- und Austritt immer dieselbe ist. Unsere Fig. 19 macht das noch etwas deutlicher. Die neue Wellenfront verschiebt sich im Kristall parallel zu sich selbst, so daß sie bei ihrer Ankunft an der zweiten Grenz-

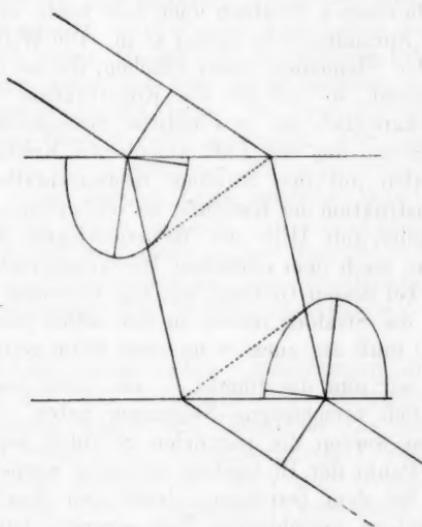


Fig. 19.

fläche mit dieser denselben Winkel bilden muß, wie mit der ersten Grenzebene. Da nun die Wellenfläche an der Austrittsstelle dieselbe Richtung hat wie in der Eintrittszone, und das Verhältnis der Geschwindigkeiten im Kristall und außerhalb denselben Wert besitzt wie oben, so wird auch die Frontänderung der Welle, die von diesen Geschwindigkeiten abhängt, wieder genau dieselbe sein wie beim Eintritt des Lichtes und nur im entgegengesetzten Sinne, also aufhebend wirken. Diese Betrachtung gilt, wie man sich durch genauere Betrachtung überzeugen kann, genau so, wenn der gebrochene Strahl nicht in der Einfallsebene liegt, was in unserer ebenen Figur natürlich nicht dargestellt werden konnte. Man kann sich indessen auch

durch Vorstellung der räumlichen Verhältnisse bei der Konstruktion der Strahlen an den beiden Grenzflächen von der Allgemeingültigkeit der Behauptung überzeugen.

Man kann die in Rede stehende Wirkung planparalleler Platten natürlich auch ohne Zuhilfenahme körperlicher Anschauung leicht dartun. Es ist bekannt, daß man die Richtung der an der Grenze eines einfachen und doppeltbrechenden Mediums gebrochenen Strahlen auch sehr leicht mit Hilfe der sogenannten Normalenfläche finden kann. Die Wellennormalen stehen auf den Elementen dieser Flächen, die sie durchsetzen, immer senkrecht, so daß für die Konstruktion der Wellennormalen bekanntlich das gewöhnliche Sinusgesetz gilt. Da auf beiden Seiten der von Luft umgebenen Kristallplatte die Wellennormalen mit den Strahlen zusammenfallen, so kann man die Konstruktion der Richtung des schließlich austretenden Strahls lediglich mit Hilfe der Wellennormalen durchführen. Da diese aber nach dem einfachen Brechungsgesetz behandelt werden und bei dessen Geltung, wie von isotropen Substanzen bekannt ist, die Strahlen immer zu sich selbst parallel wieder austreten, so muß das auch in unserem Falle gelten.

Fangen wir nun die Bündel — die unter sich bzw. zur Achse natürlich verschiedene Neigungen haben — mit einer Linse auf, so werden die parallelen Strahlen jeden Bündels in je einem Punkt der Brennebene vereinigt werden. Obwohl die Bündel bei dem Durchgang durch den Analysator eine bei den einzelnen verschiedene Parallelverschiebung erhalten, müssen ihre Brenn- oder Bildpunkte doch an genau den Stellen erscheinen, an denen sie auch vor Einschiebung des Nicols liegen; denn der Brennpunkt paralleler Strahlen hängt bei gegebener Linsenanordnung nur von der Richtung des Bündels ab und kann durch eine Parallelversetzung nicht mehr geändert werden. Es ergibt sich also, daß bei Verwendung von Bündeln paralleler Strahlen nicht nur der Astigmatismus, sondern auch die sonst durch das Nicol bewirkte Verschiebung der Bildpunkte (Bildverzerrung) nicht nur für achsenparallele, sondern auch für schiefe Büschel in Wegfall kommt. Es ist bemerkenswert, daß diese Beseitigung der Anorthoskopie eintritt, obwohl das das Gesichtsfeld projizierende Büschel ungleich den zeichnenden Büscheln seine Divergenz beibehält und dementsprechend im Analysator auch ein virtueller Astigmatismus der Schnitt-

punkte der projizierenden Hauptstrahlen eintritt. Dieser Astigmatismus kann sich aber infolge der Wirkung der Linse auf parallele Strahlen nicht mehr als Störung der Orthoskopie äußern.

Praktisch ist es von nicht zu unterschätzender Bedeutung, daß bei Einschaltung des Polarisationsprismas in den parallelen Strahlengang nicht nur die Parallelversetzung schiefer Büschel, sondern auch die bei manchen Nicoltypen vorhandene Versetzung des axialen Hauptstrahls unschädlich gemacht wird, da der durch diesen Hauptstrahl bezeichnete Bildpunkt doch wieder in die Achse des Mikroskops kommen muß, nämlich in den Brennpunkt der Linse, die zum Konvergentmachen der parallelen Büschel verwendet wird. Der Vorteil des als Analysator so oft verwendeten Thompsonschen Nicoltyps, der dem axialen Büschel keine seitliche Versetzung erteilt, wird also bei der vorgeschlagenen Verwendung paralleler Bündel illusorisch, *so daß man wieder größere Auswahl an Analysatoren hat*, ohne eine Bildverzerrung oder kreisförmige Bewegung des Bildmittelpunktes bei Drehung des Analysators befürchten zu müssen.

Die leichten chromatischen Abweichungen, die darauf beruhen, daß die vom Brechungsindex abhängige Größe der Strahlversetzung wegen der Dispersion des Materials verschieden ist, werden bei Anwendung von Bündeln paralleler Strahlen völlig unschädlich, denn die verschiedenfarbigen Strahlen werden trotz verschiedener Versetzung parallel austreten und in dem betreffenden Bildpunkt der zu Hilfe genommenen korrigierten Linse wieder vollkommen vereinigt.

Ja noch mehr. Auch die sphärische Aberration und der beim schrägen Durchtritt konvergenter Büschel schon bei isotropen Platten auftretende Astigmatismus werden vollständig vermieden. Diese Erscheinungen beruhen ja auf der verschiedenen Neigung und verschieden starken Versetzung der Strahlen eines Büschels. Sobald in einem Büschel alle Strahlen parallel sind, erfahren sie in einer planparallelen Platte, wie sie die Polarisationsprismen darstellen, alle dasselbe Schicksal, und jene Aberrationen verschwinden.

Wie erreicht man nun, daß alle Strahlen in den einzelnen Büscheln der (in einer Ebene gelegenen) Objektpunkte parallel werden? Eine unendliche Verlängerung des Tubus ist nicht

möglich, und ein Huygenssches Okular kann nur konvergente Strahlen aufnehmen. Wir müssen also das Okular durch eine Einrichtung ersetzen, die nur parallele Strahlen aufnehmen kann, d. h. nur beim Eintritt parallelstrahliger Lichtbündel das Bild deutlich werden läßt. Wie man die optische Kombination, die dieser Bedingung genügt, im einzelnen gestaltet, ist für unseren Hauptzweck, die Beseitigung von Astigmatismus und Anorthoskopie, gleichgültig und muß nach anderen Gesichtspunkten des praktischen Mikroskopbaues entschieden werden. Allgemein wird man eine optische Einrichtung der geforderten Art als auf unendlich eingestelltes Fernrohr bezeichnen können. Wir können also auch sagen, daß zur Hebung von Astigmatismus und Anorthoskopie das Okular durch ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr ersetzt werden muß (vgl. Fig. 20).

Ein auf nähere Objekte eingestelltes Fernrohr würde divergente Strahlen aufnehmen können, und diese würden beim Durchgang durch den Analysator auch astigmatisch werden. Das Fernrohr muß also streng auf unendlich eingestellt werden. Man erreicht diese Einstellung, wenn man den hinteren Brennpunkt des Fernrohr-Objektivsystems mit dem vorderen Brennpunkt des kollektiven Okulars (oder dem hinteren eines dispansiven Okulars) zusammenfallen läßt, so daß bei Akkommodation auf unendlich teleskopischer Strahlen-gang im ganzen Mikroskop herrscht. Die zeichnenden Strahlenbüschel würden von dem in der vorderen Brennebene des Objektivs gelegenen Objekt ausgehen, dann das Objektiv als parallelstrahlige Bündel verlassen, um von dem Fernrohrobjektiv in dessen Brennebene wieder zu Punkten vereinigt zu werden, und sie würden endlich das Okular wieder als parallele Bündel verlassen (Fig. 20, rechte Hälfte).

Bei Nahakkommodation können auch dann noch etwas divergente Strahlenbüschel aufgenommen werden, doch lehrt eine einfache Berechnung über die Größe der dabei auftretenden astigmatischen Brennlinien, daß sie auch für die stärksten Okulare weit unter der Grenze der Sichtbarkeit bleiben. Man kann sich übrigens leicht daran gewöhnen, beim Gebrauch des Mikroskops auf unendlich zu akkommodieren und mit entspanntem Auge zu beobachten, und tut es wohl unwillkürliche, wenn es, wie beim Gebrauch des Okularaufsatzanalysators, größere Schärfe mit sich bringt. Man kann natürlich auch das

Fernrohr etwas kürzer machen, so daß es auf unendlich eingestellt ist, wenn wir das Bild in deutlicher Schärfe erblicken; auch dann treten bei Akkommodation auf diese Entfernung nur parallele Strahlen in das Fernrohrobjektiv ein, es können

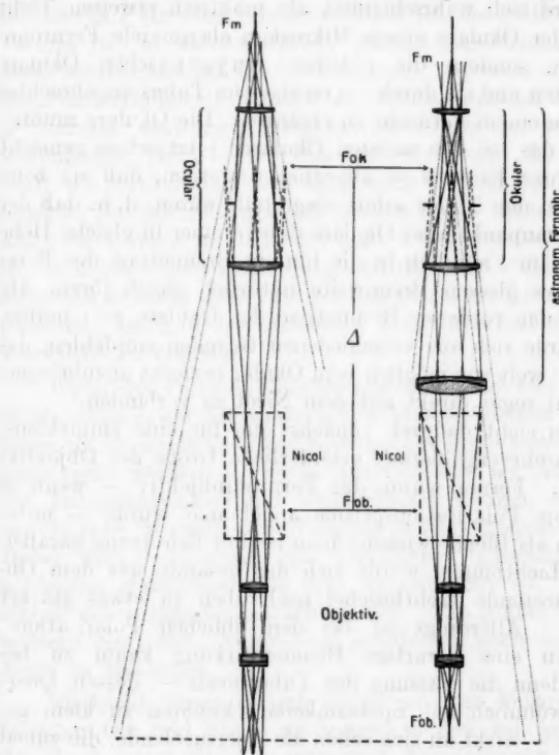


Fig. 20.

dann aber bei Akkommodationswechsel in der einen oder anderen Richtung schwach divergente bzw. schwach konvergente Strahlen aufgenommen werden. Dieser äußerst geringe Spielraum, der mit der Akkommodation zusammenhängt, und der, nebenbei bemerkt, auch bei der Korrektion mit Zylinderlinsen in Frage käme, läßt sich natürlich noch durch Anbringung eines Fadenkreuzes oder einer ähnlichen Akkommodationshilfe im vorderen Brennpunkt der Augen-

linse des Okulars (oder in einer der deutlichen Schweite entsprechenden Gegenstandsweite dieser Linse) ausschalten, doch sind derartige Maßnahmen wegen der Unbemerktbarkeit des auftretenden Fehlers nicht notwendig.

Es wird sich wahrscheinlich als praktisch erweisen, nicht an Stelle der Okulare einem Mikroskop ebensoviele Fernrohre mitzugeben, sondern die üblichen Huygesschen Okulare beizubehalten und sie durch ein einziges im Tubus angebrachtes Objektiv zu einem Fernrohr zu ergänzen. Die Okulare müßten dann (wie das bei den meisten Okularen jetzt schon gemacht wird) in ihrer Fassung so abgeglichen werden, daß sie beim Einsetzen in den Tubus sofort eingestellt wären, d. h. daß der vordere Brennpunkt aller Okulare dabei immer in gleiche Höhe zu liegen käme, nämlich in die hintere Brennebene des Fernrohrobjectivs (dessen Brennweite natürlich gleich ihrem Abstand von der vorderen Brennebene der Okulare sein müßte).

Es würde sich aus verschiedenen Gründen empfehlen, das Objektiv so weit wie möglich vom Okular entfernt anzubringen, es vielleicht sogar direkt mit dem Nicol zu verbinden.

Man erreicht dadurch zunächst die für eine empfehlenswerte Fernrohrvergrößerung erforderliche Größe der Objektivbrennweite. Ferner würde das Fernrohrobjectiv — wenn es zu weit vom Polarisationsprisma angebracht würde — unter Umständen als Blende wirken; denn bei der Benutzung parallelstrahliger Lichtbündel würde sich das gesamte aus dem Objektiv austretende Lichtbüschel nach oben zu etwas stärker ausdehnen. Allerdings ist bei den üblichen Polarisationsmikroskopen eine derartige Blendenwirkung kaum zu befürchten; denn die Fassung des Tubusnicks — dessen Querschnitt gewöhnlich aus Sparsamkeitsrücksichten zu klein gewählt wird — wirkt an sich schon als Aperturblende, die zumal die schiefen Büschel nicht unerheblich einschränkt.¹⁾

Noch energischer spricht für die angegebene Lage des Objektivs die Änderung der Pupillenverhältnisse, die durch dasselbe eintritt. Die divergenten Büschel, deren Spitze in der Austrittspupille des Objektivs liegen, werden durch das eingeführte Fernrohrobjectiv weniger divergent werden, so daß das Bild der

1) Aus diesem Grunde wäre es auch angebracht, das Tubusnicol wenn möglich noch dichter über dem Objektiv anzubringen, als es jetzt geschieht.

Objektiv *AP* (= Austrittspupille), also die *AP* des ganzen Mikroskops, näher an das Okular heranrücken muß. Der Abstand der *AP* des Mikroskops von der Augenlinse des Okulars wird also verringert. Wenn das Fernrohrobjektiv von der Mikroobjektiv-*AP* um eine Strecke entfernt ist, die größer ist als die Brennweite, so werden die die Pupille abbildenden Strahlen sogar konvergent ins Okular einlaufen. Je mehr wir dagegen das Fernrohrobjektiv der *AP* des Mikroskopobjektivs nähern, je geringer wird die Divergenzveränderung der in Betracht kommenden Büschel sein. Das gilt um so mehr, als die Brechkraft des Fernrohrobjektivs bei Annäherung an das Mikroskopobjektiv hin geringer gewählt werden muß. Jedenfalls ist es auf diesem Wege möglich, die Austrittspupille des Mikroskops in der notwendigen Entfernung von der Augenlinse zu halten, ohne daß es nötig wäre (wie bei den stärkeren Kompensationsokularen), im Bau der Okulare auf die Abschiebung der *AP* Rücksicht zu nehmen.

Wenn das Fernrohrobjektiv mit dem Nicol fest verbunden würde, etwa in der Art, in der schon jetzt die kleinen Korrekturlinsen für die durch das Nicol bewirkte Brennpunktsverschiebung angebracht werden, so würde das Objektiv bei Ausschaltung des Tubusanalysators mit ausgeschaltet werden, so daß der gewöhnliche Mikroskopstrahlengang wieder hergestellt würde. Dabei würde allerdings eine erhebliche Änderung der Vergrößerung stattfinden, die sehr unerwünscht ist, wenn man schnell nebeneinander betrachten will. Man müßte also darauf bedacht sein, diese Vergrößerungsdifferenz noch auf anderem Wege zu beseitigen.

Vielleicht würde es sich empfehlen, das Fernrohrobjektiv stets an Ort und Stelle zu lassen, so daß bei Ausschaltung des Analysators Strahlengang und Vergrößerung von vornherein dieselben blieben. Dabei wäre es vorteilhaft, das Fernrohrobjektiv in das untere Ende des oberen verschiebbaren Teiles der üblichen Mikroskopstuben einzuschrauben. Man brauchte dann nicht, wie bei fest angebrachter unterer Linse, auf die Einhaltung einer bestimmten Tubuslänge bedacht zu sein, denn die vorgeschriebene Stellung des Fernrohrobjektivs zum Okular bliebe genau dieselbe, auch bei Hebung oder Senkung des einschiebbaren oberen Tubusteiles. Eine derartige Verstellung würde nicht einmal eine Änderung der Ver-

größerung oder der Bildgüte, sondern lediglich eine Einschränkung oder Erweiterung des Gesichtsfeldes zur Folge haben.

Wenn wir statt des Okulars das auf unendlich eingestellte Fernrohr benutzen, so zwingen wir das Objektiv durch die deutliche Einstellung auf das Objekt, nach oben hin parallelstrahlige Bündel abzugeben. Wir brauchen also des Astigmatismus wegen auf das Objektiv gar keine Rücksicht zu nehmen, die Beseitigung dieses Fehlers ist durch die Einführung des auf unendlich eingestellten Fernrohrs an Stelle des Okulars vollständig gewährleistet.

Indessen ist zu bedenken, daß ein gewöhnliches mikroskopisches Objektiv nicht seine beste Leistung aufweisen kann, wenn es parallelstrahlige Bündel austreten läßt, also für unendlich große Bildweite gebraucht wird, während es für eine endliche Tubuslänge und eine bestimmte kurze Bildweite berechnet und korrigiert wurde. Für schwächere Objektive macht sich der Unterschied kaum bemerkbar, stärkere Objektive aber erfordern bekanntlich ein strengeres Einhalten der von der Mikroskopfirma als Norm angenommenen Tubuslänge, die Güte der sphärischen Korrektion leidet merklich, wenn man erheblich von der vorgeschriebenen Tubuslänge abweicht oder die Objektive gar für unendliche Bildweite gebraucht, sie also sozusagen als Luppen gebraucht (in deren vorderem Brennpunkt das Objekt liegt).

Es macht nun, wie auch Abbe gelegentlich erwähnt hat, durchaus keine Schwierigkeiten, Objektive herzustellen, die für unendliche Bildweite korrigiert sind und dabei das Optimum ihrer Leistung zeigen. Man könnte also für die Polarisationsmikroskope derartige Objektive fordern; ihre Einführung würde sicherlich den direktesten und besten Weg zur Beseitigung der Korrektionsschwierigkeit darstellen.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, darauf hinzuweisen, daß die von Abbe herrührende theoretische Auffassung des Mikroskops als einer Kombination von Lupe und astronomischem Fernrohr durch die vorgeschlagene Änderung deutlich realisiert werden würde.

Während nach der Abbeschen Deutung des gewöhnlichen Mikroskops ein letzter brechender Teil (etwa die letzte Fläche) des Mikroskopobjektivs als Fernrohrobjectiv zu dem Okular

gedacht werden mußte, würde bei der neuen Anordnung die Auffassung auch die Konstruktion des ganzen optischen Systems wirklich beherrschen und in dem Aufbau direkt zum Ausdruck kommen: das auf unendlich korrigierte Objektiv würde tatsächlich als Lupe gebraucht werden und deutlich getrennt sein von dem jenseits des Nicols gelegenen, auf unendlich eingestellten Fernrohr, das die aus der Lupe austretenden parallelen Strahlen aufnimmt, um die Divergenz der Hauptstrahlen zu vergrößern.

Die Herstellung von auf unendlich korrigierten Objektiven würde allerdings (abgesehen von der Arbeit ihrer Berechnung) den Nachteil mit sich bringen, daß diese Objektive immer nur an Polarisationsmikroskopen, nicht aber zwischendurch einmal an gewöhnlichen Mikroskopen gebraucht werden könnten. Der Nachteil erscheint ziemlich geringfügig, er ließe sich überdies dadurch beseitigen, daß man die Objektive mit einer Korrektionsfassung, ähnlich der für die Deckglaskorrektion versähe, so daß man den sphärischen Korrektionszustand durch Änderung des Abstandes der vorderen und hinteren Linsenkombination ändern könnte, wobei z. B. bei Gebrauch für unendliche Bildweite die vordere und hintere Linsengruppe einander genähert werden müßten. Derartige Objektive könnten dann sowohl für normale Tubuslänge als auch für unendliche Bildweite eingestellt werden und gestatteten gleichzeitig noch die Deckglaskorrektion.

Übrigens macht sich das Bedürfnis nach Objektiven, die für unendliche Bildweite korrigiert sind, auch bei anderen mikroskopischen Aufgaben geltend, so bei der Mikroprojektion ohne Okular. Bei großen Abständen von Mikroskop und Projektionsschirm ist eine weitere Okularvergrößerung nicht nur überflüssig, sondern oft auch unerwünscht, weil man, um eine zu große Ausziehung des Bildes zu verhindern, bei Okularvergrößerung oft zu so schwachen Objektiven greifen muß, daß die Auflösungsfähigkeit im Verhältnis zur Bildgröße unnötig gering wird (auch fürchtet man den Lichtverlust im Okular). Natürlich geben die gewöhnlichen Mikroskopobjektive, die für eine kurze Tubuslänge korrigiert sind, bei solchem Gebrauch für sehr große Bildweite nicht die besten Resultate, und die Firma Zeiß fabriziert besondere Korrektionslinsen, um die Konkordanz zwischen sphärischer Korrektion und Bildweite

wieder herzustellen (bei stärkeren Objektiven und Apochromaten muß auch die chromatische Differenz der Vergrößerung korrigiert werden). Da in unserem Falle die Verhältnisse ganz entsprechend liegen, so könnte man sich auch dadurch helfen, daß man die Korrektion durch eine solche Linse, die unmittelbar über dem Objektiv angebracht wird, zu Hilfe nähme.

Indessen geht die Frage danach, wie das unter dem Tubusanalysator gelegene optische System zu gestalten ist, um bei der Abgabe parallelstrahliger Bündel in bezug auf Korrektion sein Bestes zu erreichen, schon über die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung hinaus. Ob es sich empfiehlt, ein für allemal auf unendlich korrigierte Objektive anzuwenden, ob Objektive mit Korrektionsfassung, oder ob in anderer Weise dafür zu sorgen ist, daß der Unterschied in der vorgesehenen Korrektur der üblichen Objektive und der jetzt im Polarisationsmikroskop geforderten Leistung ausgeglichen oder unschädlich gemacht wird, sind Fragen, die der praktischen Optik überlassen und auch nach praktischen und technischen Gesichtspunkten entschieden werden müssen.

Von der Wirkung der hier vorgeschlagenen Methode zur Beseitigung, oder besser zur Vermeidung des Astigmatismus kann man sich leicht überzeugen, wenn man ein gut korrigiertes Fernrohrobjektiv oder photographisches Objektiv in das untere Ende des ausziehbaren Tubusteiles von unten hereinzieht und unter Anvisierung eines sehr fernen Gegenstandes solange verstellt, bis die Einstellung auf unendlich scharf ist. Steckt man das so improvisierte Fernrohr in den festen Tubus, so erscheinen feinste Staubpartikelchen (im Dunkelfeld oder doppeltbrechende bei gekreuzten Nicols), die vorher immer strich- oder kreuzförmig abgebildet wurden, vollkommen scharf (vgl. Taf. II, Fig. 1—4 mit Fig. 5). Auch die nicht astigmatische Aufnahme der Telegraphenglocken in Taf. III, Fig. 5 ist mit einem solchen provisorisch korrigierten Mikroskop hergestellt.

entfernen um einen homozentrischen Strahlverlauf zu erhalten. Ein solches homozentrisches Strahlverlauf kann man durch eine planparallele Kalkspatplatte erreichen, wenn man den Astigmatismus aufhebt. Eine planparallele Kalkspatplatte ist ein optisches Element, das die Lichtstrahlen nicht verzerrt, sondern parallel verläuft. Sie ist aus einem reinen Calcitgestein hergestellt und hat eine dünne Platte von ca. 1 mm Dicke.

Erklärung zu den Tafeln.

Die Tafeln zeigen die Störung des homozentrischen Strahlverlaufes eines weit geöffneten Büschels durch eine planparallele Kalkspatplatte, deren optische Achse parallel zur Grenzfläche liegt. Links ist der Strahlenverlauf im Hauptschnitt, rechts in einer dazu senkrechten Ebene dargestellt; man hat sich also eine Hälfte der Zeichnung um 90° aufgeklappt zu denken. Man sieht den Astigmatismus und jederseits eine Kaustik.

Tafel I.

Fig. 4. Darstellung der Störung des homozentrischen Strahlverlaufes eines weit geöffneten Büschels durch eine planparallele Kalkspatplatte, deren optische Achse parallel zur Grenzfläche liegt. Links ist der Strahlenverlauf im Hauptschnitt, rechts in einer dazu senkrechten Ebene dargestellt; man hat sich also eine Hälfte der Zeichnung um 90° aufgeklappt zu denken. Man sieht den Astigmatismus und jederseits eine Kaustik.

Tafel II.

Feiner Kalkspatschleifstaub mit dem Polarisationsmikroskop bei gekreuzten Nicols aufgenommen. Zeiß Apochr. 16. Komp.-Okul. 12. Kameraauszug = deutliche Schweite. Vergroßerung wie bei subjektiver Beobachtung. Fig. 1—4 und 6 mit gewöhnlichem Polarisationsmikroskop (Tubusanalysator). Fig. 5 mit anastigmatischem Polarisationsmikroskop aufgenommen, längerer Auszug. Bei 1—5 gleiches Objekt, überall gleiche Vergrößerung 187.

- Fig. 1. Tiefe Einstellung auf die proximalen Brennlinien der astigmatischen Staubpunktbilder.
- Fig. 2. Hohe Einstellung auf die distalen Brennlinien der astigmatischen Staubpunktbilder.
- Fig. 3. Mittlere Einstellung zwischen den zwei Brennlinienebenen. Die Punktbilder sind ganz unscharf.
- Fig. 4. Bei derselben Aufnahme wurde erst auf die proximalen und dann auf die distalen Brennlinien eingestellt. Astigmatische Kreuze.
- Fig. 5. Dieselbe Staubpartie wie in Fig. 1—4 mit demselben Nicol und demselben Objektiv in gleicher Vergrößerung abgebildet. Das Mikroskop ist durch ein Fernrohrokular anastigmatisch korrigiert. Die Abbildung ist punktuell.
- Fig. 6. Andere Staubpartie, deren Partikelchen in verschiedener Höhe lagen, so daß auf der Platte teils die proximalen, teils die distalen Brennlinien aufgefangen wurden. Gewöhnliches Polarisationsmikroskop.

Tafel III.

Vergleichsaufnahmen eines Telegraphenglockenträgers mit gewöhnlichem Mikroskop (Fig. 1), astigmatischem (Fig. 2—4) und anastigmatischem Polarisationsmikroskop (Fig. 5 und 6). Mit Hilfe des Spiegels und eines in die Objekttschöffnung eingesetzten photographischen Objektivs (Luminar 3,5 cm von Winkel) wurde das Bild entworfen und durch das Mikroskop (Leitz Objekt. I. und 7 × Okularvergrößerung) aufgenommen. Bei 5 und 6 ist die Schärfe etwas geringer als bei 1, auf die Störung der sphär. Korrektion wurde keine Rücksicht genommen. Auch war das Fernrohrokular improvisiert, nicht wie bei Herstellung von Fig. 5, Taf. II, mit richtigem Fernrohrobjektiv versehen. Endlich machte sich an dem Tage, an dem 5 und 6 aufgenommen wurden, Luftschlierenbildung bemerkbar.

- Fig. 1. Aufnahme mit gewöhnlichen Mikroskop ohne Nicol. Alles scharf.
- Fig. 2. Nach Einschaltung des Tubusanalysators. Die Abbildung ist *astigmatisch*, gänzlich unscharf. *Mittlere Einstellung*.
- Fig. 3. Gewöhnliches Polarisationsmikroskop wie Fig. 2, aber *tiefe Einstellung*. Die senkrechten Linien scharf, die wagerechten total unscharf.
- Fig. 4. Gewöhnliches astigmatisches Polarisationsmikroskop, wie Fig. 2 und 3, aber *hohe Einstellung*. Die wagerechten Linien scharf, die senkrechten total unscharf.
- Fig. 5. Mikroskop mit *Fernrohrokular* (telezentrischem Strahlengang) ohne *Nicol*. Bild scharf.
- Fig. 6. Anastigmatisches Polarisationsmikroskop, wie Fig. 5, aber mit *Nicol*. Die Einschaltung des Nicols ruft keinen Astigmatismus hervor.

(Eingegangen 12. März 1915.)

gewöhn-
ischem
l eines
(Lumi-
as Mi-
mmen.
törung
ch war
Fig. 5,
te sich
dieren-

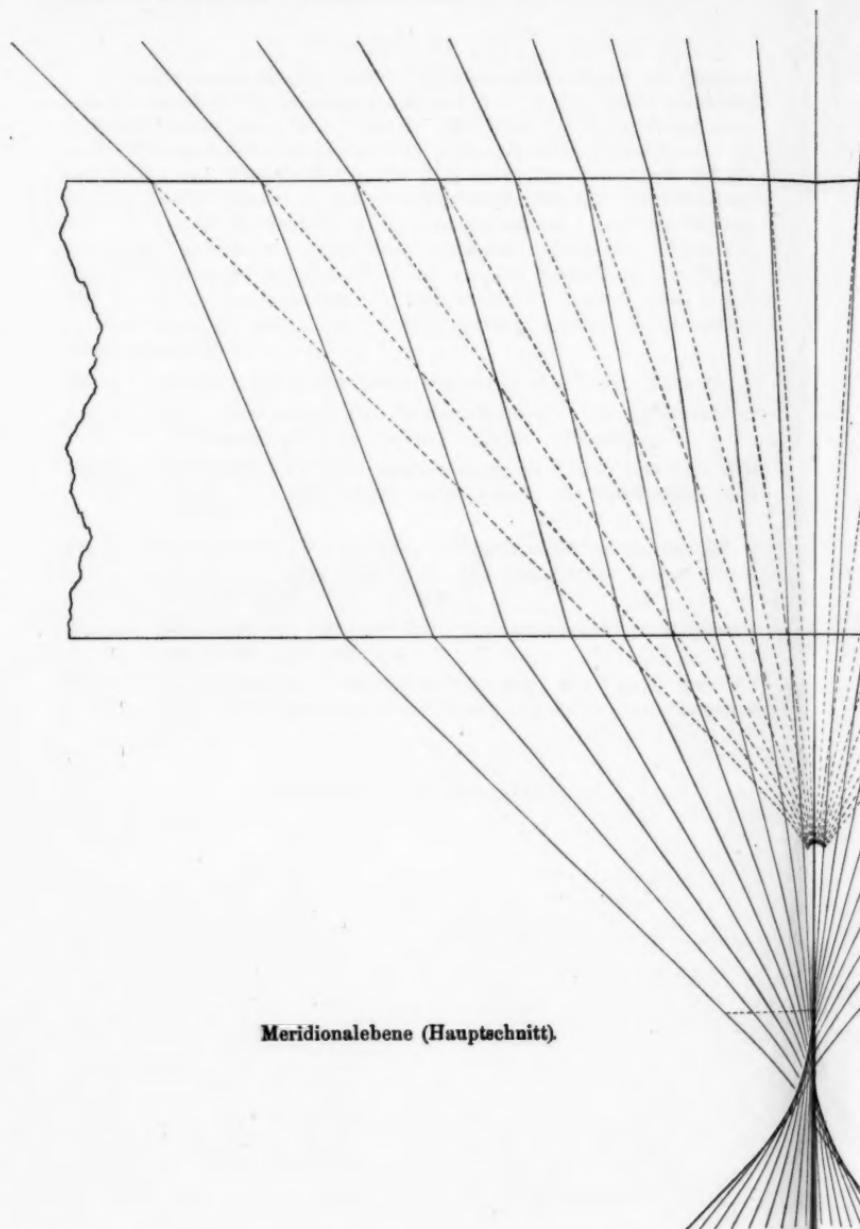
scharf.
ng ist

re Ein-
n total

Fig. 2
scharf,

ngang)

er mit
tismus

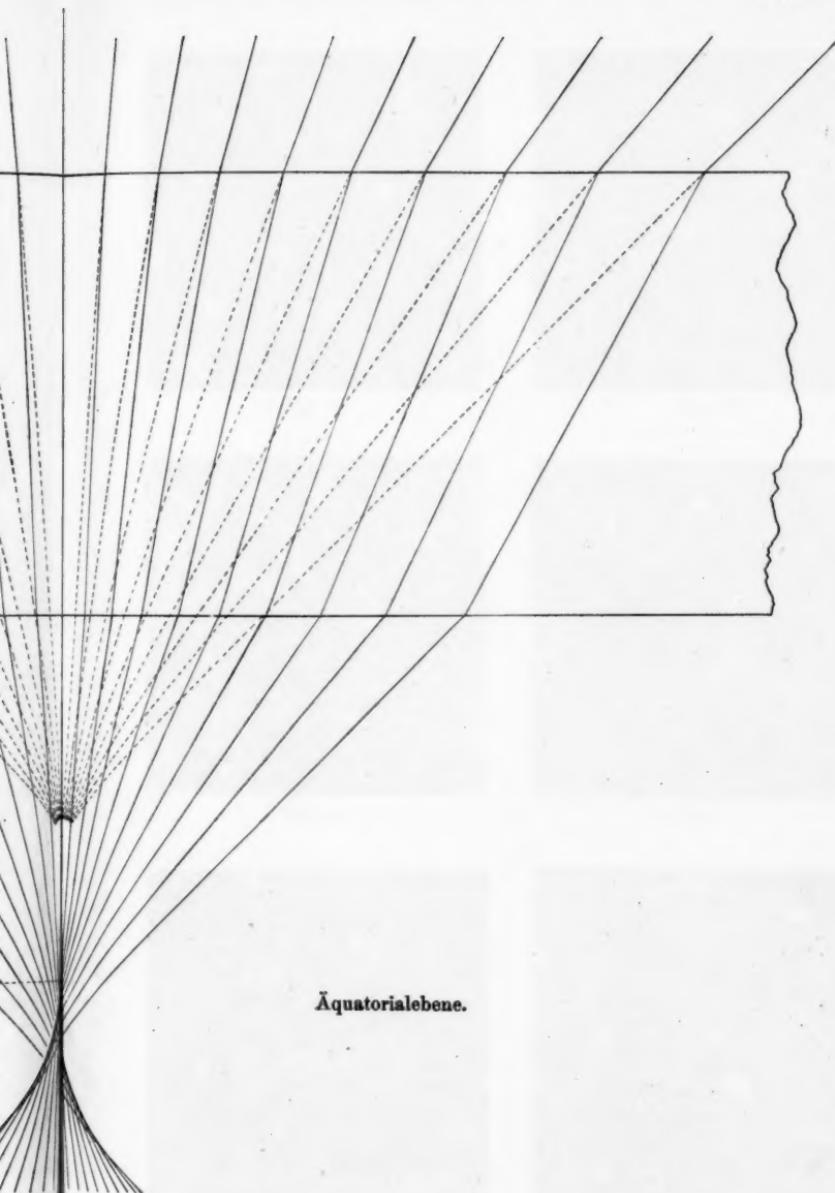


Meridionalebene (Hauptschnitt).

Fig.

S. Boer.

Tafel I.



Äquatorialebene.

Fig.

S. Bömer.





Fig. 1.

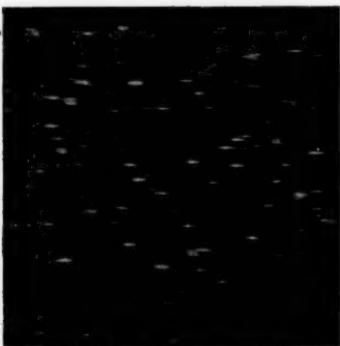


Fig. 2.

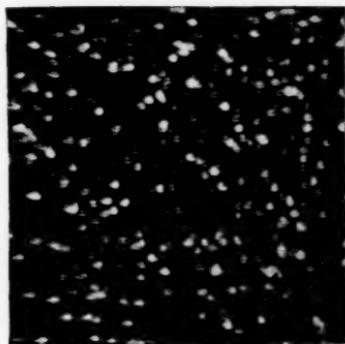


Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.

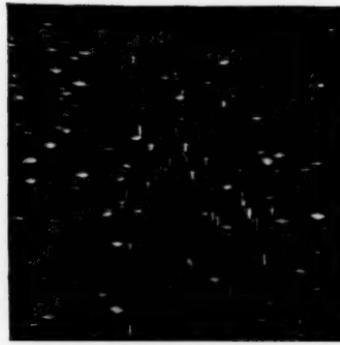
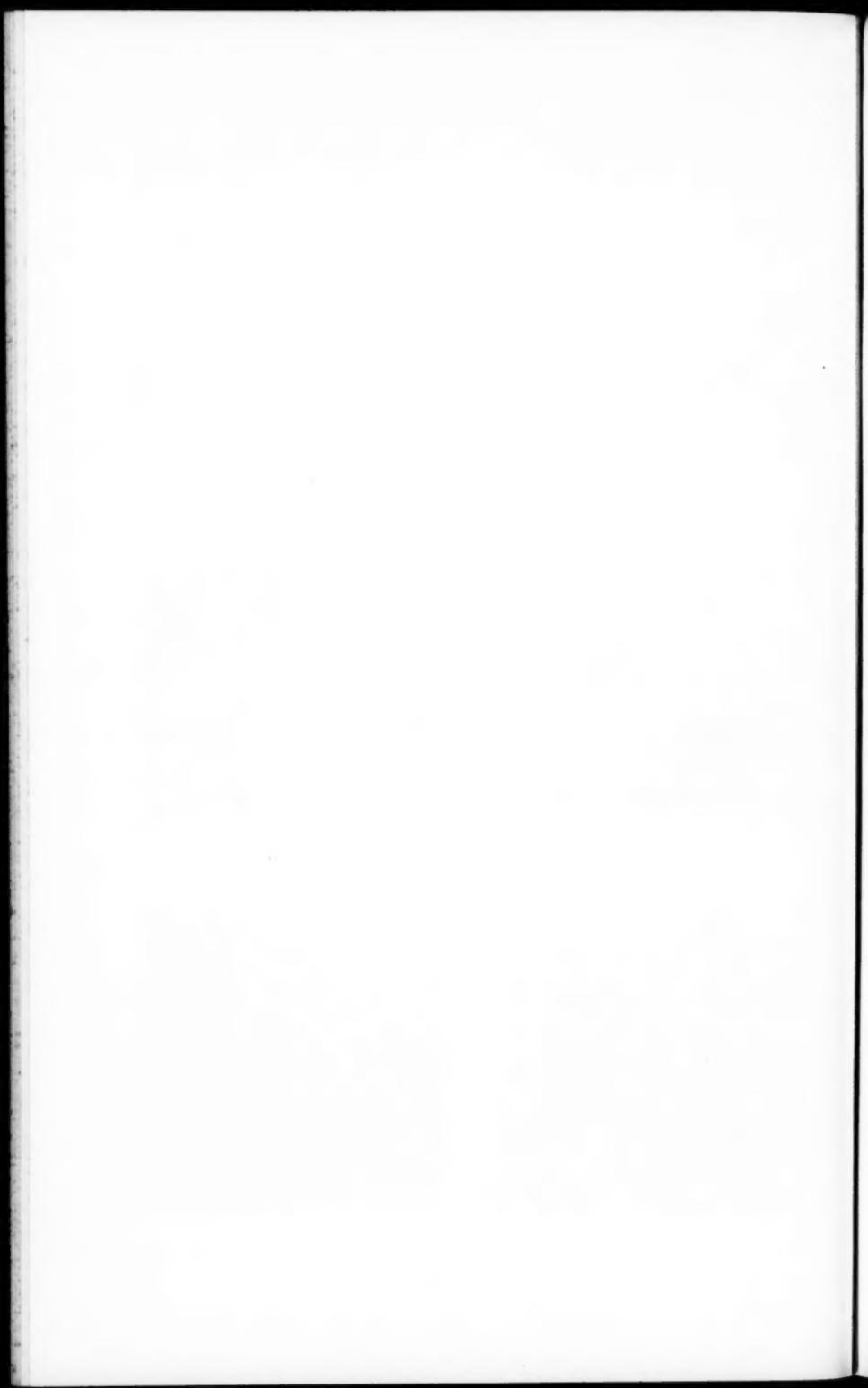


Fig. 6.

S. Becher.



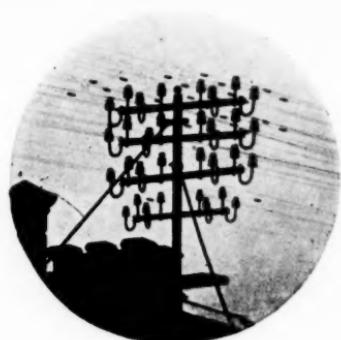


Fig. 1.



Fig. 2.

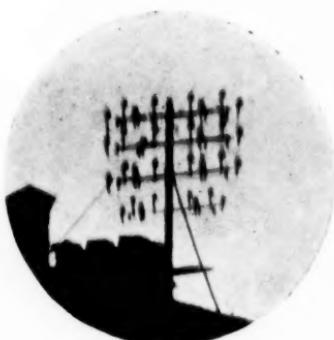


Fig. 3.

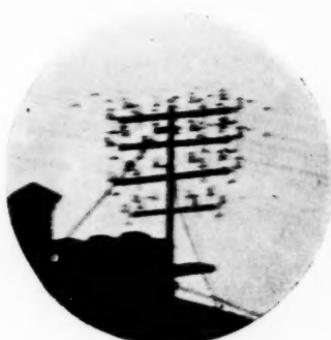


Fig. 4.

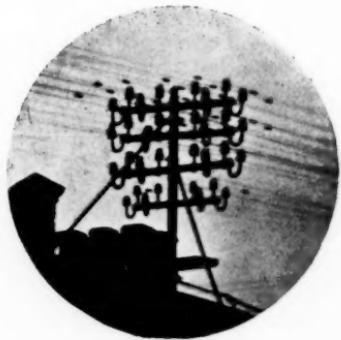


Fig. 5.

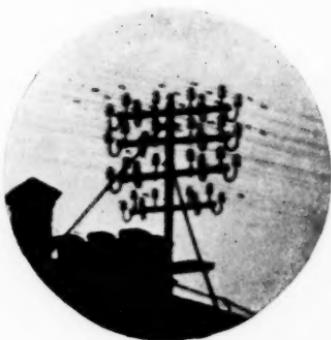


Fig. 6.

S. Becher.

m
se
w
S
T
L
w

v
A
S
k
n
V

v
F
g
t
H
H
V
P
r
-

A

**2. Spontane Temperaturschwankungen
in einem Gase;
von F. v. Hauer.**

Aus dem Umstande, daß die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle verschieden sind, und der Zufall Häufungsstellen schneller und langsamer Moleküle schaffen muß, folgt notwendigerweise die Existenz von Abweichungen einzelner Stellen eines Gasraumes, der, als Ganzes betrachtet, im Temperaturgleichgewicht ist, von der mittleren Temperatur. Diese Temperaturabweichungen sollen im folgenden berechnet werden.

Eine ähnliche, allgemeiner gestellte Frage wurde schon von anderen Autoren auf einem anderen Wege behandelt. A. Einstein¹⁾ leitet aus der Boltzmannschen Formel $S = k \cdot \log \cdot W$ die Wahrscheinlichkeit dW ab, daß ein physikalisches System, das durch die Koordinaten $\lambda_1 \dots \lambda_n$ definiert ist, sich in einem Zustande befindet, wo die Größen λ Werte zwischen λ_1 und $\lambda_1 + d\lambda_1 \dots \lambda_n$ und $\lambda_n + d\lambda_n$ haben.

$$dW = e^{\frac{S - S_0}{k}} f d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

wo S die Entropie des Systems in diesem Zustande, S_0 die Entropie im Zustande des „idealen thermodynamischen Gleichgewichts“, k die Boltzmannsche Konstante und f eine Funktion der Größen λ ist. Auf die Anwendung dieser allgemeinen Formel für den hier betrachteten Fall und den Vergleich der Resultate beider Wege soll weiter unten eingegangen werden. Von vornherein lag gegen die Anwendung der Formel zur Berechnung der Temperaturabweichungen sehr kleiner Gasräume, in denen die Anzahl der Moleküle nicht mehr sehr

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 33. p. 1275; vgl. auch Einstein, Ann. d. Phys. 14. p. 354; 19. p. 371; 22. p. 569; und Smoluchowski, Ann. d. Phys. 25. p. 205.

groß ist, das Bedenken vor, daß hier das Entropieprinzip seinen Sinn verliert, sich also nur eine Näherungsformel berechnen läßt, die bei geringen Molekülzahlen unrichtig wird.

Im folgenden wurde daher die Berechnung vom Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz ausgehend durchgeführt. Es soll zunächst die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, daß ein beliebig herausgegriffener Teil des Gases, der n Moleküle enthalte, die von der mittleren Temperatur T abweichende τ habe. Dabei wollen wir diese Wahrscheinlichkeit so verstehen: Wir denken uns sehr oft n beliebige Moleküle, bzw. einen Gasraum, der n Moleküle enthält, herausgegriffen, und die Anzahl der Fälle, in denen diese Moleküle eine mittlere Temperatur zwischen τ und $\tau + d\tau$ haben, dividiert durch die Anzahl aller Fälle, sei unsere Wahrscheinlichkeit. Betrachten wir zu diesem Zwecke ein Gas von der Temperatur T und schreiben jedem Molekül eine Temperatur τ zu, definiert durch die Gleichung

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{3}{2} k \tau$$

($mc^2/2$ = lebendige Kraft des Moleküls, k = Boltzmannsche Konstante). Führen wir diese Temperatur τ statt der Geschwindigkeit c in das Maxwellsche Gesetz ein, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül eine Temperatur zwischen τ und $\tau + d\tau$ habe, gleich

$$(1) \quad W_1(\tau) d\tau = K_1 e^{-\frac{3}{2} \frac{\tau}{T}} \sqrt{\tau} d\tau,$$

wo

$$K_1 = 3 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(\frac{1}{T}\right)^{3/2}.$$

Daraus können wir nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß 2, 3, 4, ... n Moleküle zusammen die mittlere Temperatur τ haben.

Hat von zwei beliebig herausgegriffenen Molekülen eines die Temperatur T_1 , so muß, damit beide zusammen die Temperatur τ haben, das zweite die Temperatur $T_1' = 2\tau - T_1$ haben. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit hierfür

$$W_1(T_1) dT_1 W_1(2\tau - T_1) dT_1'.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß diese Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind, also daß die Anzahl aller vor-

handenen Moleküle sehr groß gegen die Anzahl der herausgegriffenen ist. Die Temperatur τ der beiden Moleküle kann in allen Fällen zustande kommen, wo das Molekül 1 eine Temperatur T_1 zwischen 0 und 2τ hat; denn dann können wir immer eine die Gleichung $2\tau = T_1 + T_1'$ erfüllende Temperatur T_1' hierzu finden. Wir haben also, um die Wahrscheinlichkeit zu finden, daß unsere zwei Moleküle überhaupt die Temperatur τ haben, das obige Wahrscheinlichkeitsprodukt über T_1 zu integrieren zwischen den Grenzen von 0 bis 2τ . Wir erhalten dann die Wahrscheinlichkeit, daß zwei beliebig herausgegriffene Moleküle eine Temperatur zwischen τ und $\tau + d\tau$ haben, zu

$$W_2(\tau) d\tau = \int_0^{2\tau} W_1(T_1) dT_1 W_1(2\tau - T_1) dT_1'.$$

Wenn wir aus Gleichung (1) die Funktion W_1 ausdrücken und zusammenziehen zu

$$W_2(\tau) d\tau = K_1^2 \pi e^{-2 \frac{3}{2} \frac{\tau}{T}} dT_1' \int_0^{2\tau} \sqrt{T_1(2\tau - T_1)} dT_1$$

und berücksichtigen, daß das allgemeine Integral

$$\int \sqrt{ax - x^2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4}\right) \sqrt{ax - x^2} + \frac{a^2}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{ax - x^2}}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{ax - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}} = 0$$

und schließlich $dT_1' = 2d\tau$, so erhalten wir

$$(2) \quad W_2(\tau) d\tau = K_1^2 \pi e^{-2 \frac{3}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^2 d\tau.$$

Der Ausdruck $\int_0^\infty W_2(\tau) d\tau$ entspricht der Wahrscheinlichkeit,

daß die zwei Moleküle irgendeine Temperatur zwischen 0 und ∞ haben, muß also gleich Eins sein. In der Tat ist, da

$$\int_0^{\infty} x^{2a+1} e^{-\beta x^2} dx = \frac{a!}{2\beta^{a+1}},$$

das obige Integral, wenn wir $\tau = x^2$ setzen, gleich

$$\int_0^{\infty} W_2(\tau) d\tau = 2 K_1^2 \pi \int_0^{\infty} e^{-2 \frac{3}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^a d\tau = 2 K_1^2 \pi \frac{2}{2 \left(\frac{3}{T} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

und, da (vgl. bei Gleichung (1))

$$2\pi K_1^2 = \frac{27}{T^{\frac{3}{2}}},$$

also

$$\int_0^{\infty} W_2(\tau) d\tau = 1.$$

Mit Hilfe von Gleichung (1) und (2) können wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß drei (zufällig) herausgegriffene Moleküle eine mittlere Temperatur τ haben. Hat das erste Molekül wieder die Temperatur T_1 , so müssen, damit alle drei zusammen die Temperatur τ haben, die beiden anderen eine mittlere Temperatur $T_2 = (3\tau - T_1)/2$ haben, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$W_1(T_1) dT_1 W_2\left(\frac{3\tau - T_1}{2}\right) dT_2,$$

und somit erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß die drei Moleküle die mittlere Temperatur τ haben, indem wir obigen Ausdruck über alle möglichen Werte von T_1 integrieren, d. h. also von 0 bis 3τ , und es ist also

$$W_3(\tau) d\tau = \int_0^{3\tau} W_1(T_1) dT_1 W_2\left(\frac{3\tau - T_1}{2}\right) dT_2$$

und nach Einsetzen von Formel (1) und (2), sowie $dT_2 = \frac{3}{2} d\tau$ und Ausführen des dann sehr einfachen Integrals

$$(3) \quad W_3(\tau) d\tau = \frac{2 \cdot 27 \sqrt{8}}{5 \cdot 7} K_1^3 \pi e^{-2 \frac{3}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^{\frac{3}{2}} d\tau.$$

Natürlich muß wieder die Wahrscheinlichkeit, daß die drei Moleküle eine Temperatur zwischen 0 und ∞ haben, gleich Eins sein, also

$$\int_0^\infty W_3(\tau) d\tau = 1,$$

wovon wir uns unter Benutzung der Formel

$$\int_0^\infty x^{2\alpha} e^{-\beta x^2} dx = \frac{1, 3, 5 \dots (2\alpha - 1)\pi}{2^{\alpha+1} \sqrt{\beta^{2\alpha+1}}}$$

leicht überzeugen.

In gleicher Weise weiter schließend, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß vier Moleküle die mittlere Temperatur τ haben, gleich

$$(4) \quad W_4(\tau) d\tau = \frac{32}{3 \cdot 5} K_1^4 \pi^2 e^{-4 \frac{3}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^5 d\tau.$$

Der Vergleich der Formeln (1) bis (4) zeigt, daß wir für $n = 1, 2, 3, 4$ setzen können

$$W_n(\tau) d\tau = K_n e^{-n \frac{3\tau}{2T}} \tau^{\frac{3n}{2}-1} d\tau,$$

wo $K_n \tau$ nicht enthält.

Diese letztere Formel können wir nun für beliebiges n erweitern. Damit n Moleküle eine mittlere Temperatur τ haben, von denen $n - 2$ eine mittlere Temperatur T_{n-2} haben, müssen die restlichen 2 zusammen offenbar die Temperatur

$$T_2 = \frac{n\tau - (n-2)T_{n-2}}{2}$$

ergeben, und die Wahrscheinlichkeit hierzu ist

$$W_{n-2}(T_{n-2}) dT_{n-2} W_2(T_2) dT_2.$$

Wir finden die Wahrscheinlichkeit, daß n Moleküle die Temperatur τ bei beliebigem T_{n-2} haben, wieder, indem wir diesen Ausdruck über alle möglichen Werte von T_{n-2} , d. h. von 0 bis $\tau n / (n - 2)$ integrieren, also

$$W_n(\tau) d\tau = \int_0^{\frac{n}{n-2}\tau} W_{n-2}(T_{n-2}) dT_{n-2} W_2\left(\frac{n\tau - (n-2)T_{n-2}}{2}\right) \frac{n}{2} dT_2.$$

Für $n - 2 \leq 4$ können wir die in Gleichung (5) erhaltene Funktion setzen, und haben so

$$\begin{aligned}
 & W_n(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{\frac{n}{n-2}\tau} K_{n-2} e^{-(n-2)\frac{3T_{n-2}}{2T}} T_{n-2}^{\frac{3}{2}-1} dT_{n-2} K_2 e^{-n\frac{3\tau}{2T}} e^{(n-2)\frac{3T_{n-2}}{2T}} \\
 &\quad \left[\frac{n\tau - (n-2)T_{n-2}}{2} \right]^2 \frac{n}{2} d\tau \\
 &= \frac{K_{n-2} K_2}{8} n(n-2)^2 e^{-n\frac{3\tau}{2T}} d\tau \int_0^{\frac{n}{n-2}\tau} T_{n-1}^{\frac{3n}{2}-4} \left(\frac{n}{n-2}\tau - T_{n-2} \right)^2 dT_{n-2}
 \end{aligned}$$

und nach Ausführung des Integrales und Zusammenziehung

$$W_n(\tau) d\tau = \frac{K_{n-2} K_2}{8} \frac{(n-2)^2 n \left(\frac{n}{n-2} \right) \left(\frac{3n}{2} - 1 \right)}{\left(\frac{3n}{2} - 3 \right) \left(\frac{3n}{2} - 2 \right) \left(\frac{3n}{2} - 1 \right)} e^{-n\frac{3\tau}{2T}} \tau^{\frac{3n}{2}-3} d\tau.$$

Die Form des Ausdrückes (5) bleibt also für beliebig große n erhalten, und wir haben für den Koeffizienten K_n eine Rekursionsformel gewonnen. Wenn wir in dem letzten Ausdruck K_{n-2} wieder durch K_{n-4} usw. darstellen, so erhalten wir für gerades n

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{K_2}{4} \frac{n^{\frac{3n}{2}}}{{(n-2)^{\frac{3n}{2}-3} \left(\frac{3n}{2} - 1 \right) \left(\frac{3n}{2} - 2 \right) \left(\frac{3n}{2} - 3 \right)}} \\
 &\cdot \frac{K_4}{4} \frac{(n-2)^{\frac{3n}{2}-3}}{{(n-4)^{\frac{3n}{2}-6} \left(\frac{3n}{2} - 4 \right) \left(\frac{3n}{2} - 5 \right) \left(\frac{3n}{2} - 6 \right)}} \cdots \frac{K_1}{4} \frac{4^6}{2^8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} K_2 \\
 &= 4 \left(\frac{K_2}{4} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{\frac{3n}{2}(n-2)^{\frac{3n}{2}-3}(n-4)^{\frac{3n}{2}-6} \cdots 6^0 \cdot 4^6}{(n-2)^{\frac{3n}{2}-3}(n-4)^{\frac{3n}{2}-6} \cdots 6^0 \cdot 4^3 \cdot 2^3} \frac{2}{\left(\frac{3n}{2} - 1 \right)!} \\
 &= \left(\frac{K_1 n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{n^{\frac{3n}{2}}}{\left(\frac{3n}{2} - 1 \right)!} = \left(\frac{3n}{2T} \right)^{\frac{3n}{2}} \frac{1}{\left(\frac{3n}{2} - 1 \right)!}.
 \end{aligned}$$

Für ungerades n erhalten wir in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{K_2}{4} \frac{\frac{3n}{2}}{(n-2)^{\frac{3n}{2}-3} \left(\frac{3n}{2}-1\right)\left(\frac{3n}{2}-2\right)\left(\frac{3n}{2}-3\right)} \\
 &\quad \cdot \frac{K_2}{4} \frac{(n-2)^{\frac{3n}{2}-3}}{(n-4)^{\frac{3n}{2}-6} \left(\frac{3n}{2}-4\right)\left(\frac{3n}{2}-5\right)\left(\frac{3n}{2}-6\right)} \dots \\
 &\quad \cdot \frac{K_2}{4} \frac{\frac{3^{n/2}}{2}}{1^{\frac{n}{2}}(0/2-1)(0/2-2)(0/2-3)} K_1 \\
 &= \left(\frac{K_2}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\frac{3n}{2}(n-2)^{\frac{3n}{2}-3} 3^{n/2}}{(n-2)^{\frac{3n}{2}-3} \dots 3^{n/2} 1^{n/2}} \frac{1}{\left(\frac{3n}{2}-1\right)\left(\frac{3n}{2}-2\right) \dots 5/2 \cdot 3/2},
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$K_n = \left(\frac{3n}{2T}\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{\frac{3n-1}{2}}{\sqrt{\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (3n-2)}.$$

Es könnte auffallen, daß die Ausdrücke für K_n bei geradem und ungeradem n so verschieden sind, während es physikalisch doch nicht viel ändern kann, ob wir etwa 1000 oder 1001 Moleküle betrachten. Tatsächlich fallen die beiden Ausdrücke für große n auch fast zusammen; berücksichtigen wir nämlich, daß nach der Stirlingschen Formel für großes a

$$a! = \left(\frac{a}{e}\right)^a \sqrt{2\pi a}$$

und daß ferner

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

so wird K_n für ungerades n angenähert

$$K_n = \left(\frac{3n}{2T}\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{3n-1}{2e}\right)^{\frac{3n-1}{2}}}$$

und für gerades n finden wir

$$\left(\frac{3n}{2T}\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{3n-1}{2e}\right)^{\frac{3n}{2}-1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß unsere n Moleküle eine Temperatur zwischen 0 und ∞ haben, ist gleich Eins, also muß für jedes n (und T) gelten

$$\int_0^\infty K_n e^{-\frac{3n}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^{\frac{3n}{2}-1} d\tau = 1,$$

was wir unter Anwendung der schon auf p. 368 u. 369 angeführten Integralformeln und Einsetzen der gewonnenen Ausdrücke für K_n sowohl für gerades als ungerades n leicht bestätigt finden. Natürlich hätten wir auch umgekehrt aus dieser letzten Bedingung K_n berechnen können; aber wir hätten uns damit des Genusses beraubt, zu sehen, daß obige Wahrscheinlichkeit wirklich gleich Eins, und die darin liegende Kontrolle unserer Formel verloren.

Damit sind uns nun die quantitativen Beziehungen der gesuchten Temperaturabweichungen bekannt, und wir können die wahrscheinlichste Temperaturabweichung von n Molekülen, sowie das Mittel des Quadrates der Abweichungen angeben. Die wahrscheinlichste Abweichung ergibt sich durch Differenziation von $W_n(\tau)$ nach τ zu

$$\Delta T_w = -T \frac{2}{3n}.$$

Sie ist also schon bei Gasräumen mit 10^6 Molekülen (bei Atmosphärendruck entspricht dies einem Würfel mit der Kantenlänge etwa gleich der Wellenlänge violetten Lichtes) praktisch gleich Null.

Das mittlere Abweichungsquadrat ist gleich

$$\langle \Delta T \rangle^2 = \int_0^\infty W_n(\tau) (T - \tau)^2 d\tau.$$

Nach Ausführen von $W_n(\tau)$ und dem Quadrate haben wir

$$\overline{(\Delta T)^2} = K_n \left\{ T^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{3n}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^{\frac{3n}{2}-1} d\tau - 2T \int_0^{\infty} e^{-\frac{3n}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^{\frac{3n}{2}} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\frac{3n}{2} \frac{\tau}{T}} \tau^{\frac{3n}{2}+1} d\tau \right\}$$

Das erste dieser 3 Integrale ist offenbar gleich $1/K_n$; das zweite wird nach partieller Integration gleich T/K_n ; und das dritte

$$T^2 \frac{3n+2}{3n} \frac{1}{K_n},$$

so daß für $\overline{(\Delta T)^2}$ sich ergibt

$$\overline{(\Delta T^2)} = T^2 \frac{2}{3n}.$$

Für $T = 300^\circ$ abs. und Gasräume von der obigen Größe ist also

$$\sqrt{\overline{(\Delta T)^2}} = 0,24^\circ \text{ C.}$$

Im Vakuum sind die Gasräume mit 10^6 Molekülen natürlich entsprechend größer.

Wir können uns endlich fragen, wie große Temperaturabweichungen in Gasräumen von bestimmter Größe noch „praktisch vorkommen“, und wollen sagen: Ein Gasraum mit einer bestimmten Temperatur bzw. in einem Temperaturintervall kommt praktisch noch vor, wenn die Wahrscheinlichkeit hierfür größer als $1/100$ ist. Das ist natürlich von der Größe des Intervalls abhängig; aber wegen des steilen Abfalls der Kurve für W_n sehen wir doch ziemlich deutlich, welche Temperaturgebiete noch zu berücksichtigen sind. Aus der gezeichneten Kurve (Fig. 1) ist zu ersehen, daß diese maximalen Abweichungen für

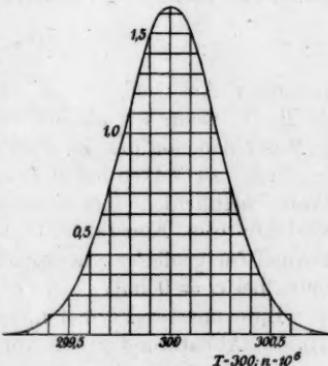


Fig. 1.

$T = 300$ und $n = 10^6$, den Betrag 0,5 bis 0,6 erreichen, also von der Größenordnung der mittleren Abweichung sind.

Man überzeugt sich leicht aus der Figur, daß der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit,

$$\int_0^{299,5} W_n(\tau) d\tau$$

oder

$$\int_{299,4}^{299,5} W_n d\tau$$

von der verlangten Größe ist, während die ganze Fläche natürlich gleich Eins ist. Für höhere Werte von n würde die Kurve höher und schmäler werden.

Wir kommen nun auf die im Anfange erwähnte Einstein'sche Formel zurück. Aus derselben wurden die Abweichungen in der Temperatur zweier leitend verbundener Körper¹⁾, bzw. eines Körpers in einem Wärmebad²⁾, abgeleitet und die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung Θ gefunden zu

$$Ce^{-\frac{c\Theta^2}{2kT^2}} d\Theta,$$

ferner das mittlere Abweichungsquadrat

$$\overline{\Theta^2} = \frac{kT^2}{c}.$$

Letzterer Ausdruck ist mit dem hier gefundenen identisch, da für c , wenn wir als den einen Körper einen Gasraum mit n Molekülen, als den zweiten einen sehr großen Gasraum betrachten, zu setzen haben $(3n/2)k$. Dagegen befriedigt die Wahrscheinlichkeitsformel, obwohl sie sich numerisch in ihrem Verlaufe (die Konstante C kennen wir hier nicht) unserer Formel für großes n gut anpaßt, nicht recht, da sie ihr Maximum bei $\Theta = 0$ hat.

Eine unserer Formel nähere Gestalt nimmt sie an, wenn wir die Ableitung für den vorliegenden Fall passender durch-

1) G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung (s. Wissenschaft 52. p. 93).

2) M. v. Smoluchowski, Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptatzes der Wärmetheorie (Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität; Göttingen, Wohlfiskehl-Kongreß).

führen. Die in die Einsteinsche Formel einzusetzende Entropiedifferenz wird dann gleich

$$\int d\eta = \int \frac{3n}{2} k d\tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T} \right) = \frac{3n}{2} k \lg \tau - \frac{3n}{2} k \frac{\tau}{T}$$

und daher

$$dW = C e^{-\frac{S-S_0}{k}} f d\tau = C \tau^{\frac{3n}{2}} e^{-\frac{3n}{2} \frac{\tau}{T}} f d\tau.$$

Der Ableitung der Temperaturdifferenzen war das Maxwellsche Gesetz zugrunde gelegt; das betrachtete Gas befand sich mithin im Zustande der größten Wahrscheinlichkeit, des Entropiemaximums, und es ist zu beachten, daß ein Ausgleich dieser Differenzen das Gas in einen unwahrscheinlicheren (nicht Maxwellschen) Zustand überführen würde. Dieses Gas stellt uns ein abgeschlossenes System dar, dessen Entropie konstant bleibt, bzw. sehr wahrscheinlich immer in der Nähe ihres Maximums ist, trotz der Temperaturdifferenzen im Innern. Es läßt sich hier eine Parallele mit einem anderen abgeschlossenen System, dem Universum, ziehen¹⁾, dessen Entropie, worauf besonders Smoluchowski (l. c.) hinweist, keineswegs einem konstanten Werte zustrebt, sondern nur meist in der Nähe desselben zu finden ist. In gewissen Zuständen ist es sogar wahrscheinlicher, daß sich die Entropie des Systems (freilich sehr wenig) verringert, als vergrößert. Denken wir uns nämlich die Entropie des Systems oder seine Zustandswahrscheinlichkeit zur Vereinfachung als Funktion nur einer Koordinate λ aufgetragen, so können wir eine Kurve, die ungefähr die Gestalt von Fig. 2 hat, erhalten. Dabei soll die Gerade AA' die von der Kurve begrenzte Fläche halbieren. Treffen wir das System in einem Zustande hoher Wahrscheinlichkeit an, der einem λ -Werte links von AA' entspricht, so ist es wahrscheinlicher, daß das System λ -Werten rechts von AA' , also einem Zustande geringerer Entropie und Wahrscheinlichkeit zustrebt, da wir es ja gleich oft links und rechts von AA' treffen müssen.

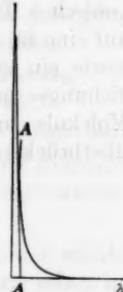


Fig. 2.

1) Vgl. L. Boltzmann, Wied. Ann. 60. p. 396. 1897.

Betrachten wir zwei nebeneinander liegende kleine Gasräume, die, rings von Gas umschlossen, eine Temperaturdifferenz aufweisen, so ist es sehr wahrscheinlich, daß sich diese Differenz ausgleicht, besonders solange sie nicht vom übrigen Gas beeinflußt werden. Im ganzen Gas werden jedoch die Differenzen bleiben. So wie das Gas im Maxwellschen Zustand Temperaturdifferenzen aufweist, so werden sich auch im Universum „unwahrscheinliche Stellen“, an denen physikalisches Geschehen möglich ist, finden. Auch hier wird ein Teilsystem (Sonnensystem), das als zeitweilig isoliert betrachtet werden kann, wie die betrachteten beiden Gasräume, dem Wärmefeld zuzustreben scheinen; dagegen kann ein plötzlicher Einfluß des übrigen Universums, eine kosmische Katastrophe, das Teilsystem wieder in einen unwahrscheinlichen Zustand überführen.

Der Wärmefeld des Universums entspricht in unserer Parallele einem Gas, dessen Moleküle alle die gleiche Geschwindigkeit haben, stellt somit einen sehr unwahrscheinlichen Zustand dar. So wie ein solches Gas sich sehr wahrscheinlich dem Maxwellschen Zustande nähert, so werden sich im wärmefreien Universum Stellen ausbilden, an denen physikalisches Geschehen möglich ist. Vielleicht weisen die kosmogonischen Theorien, die ja meist von einem Urnebel ausgehen, auf eine im Wärmefeld begriffene Materie hin, in der der Zufall sowie ein zwischen „Uratomen“ wirkendes kompliziertes Anziehungs- bzw. Abstoßungsgesetz die chemischen Atome und Moleküle und schließlich (die Phantasie muß den Sprung überbrücken) die Sonnen- und Weltensysteme bildete.

(Eingegangen 3. April 1915.)

**3. Interferenz der
Röntgenstrahlen und Kristallstruktur,
von R. Glocker.**

(Auszug aus der Münchener Inauguraldissertation.¹⁾

(Hierzu Tafel IV u. V.)

§ 1. Einleitung.

Kurze Zeit nach der bedeutsamen Entdeckung von Friedrich, Knipping und Laue²⁾, daß der Durchgang eines Röntgenstrahlbündels durch einen Kristall Anlaß zu Interferenzerscheinungen gibt, wurde von Herrn E. Wagner der Gedanke ausgesprochen, einen derartigen Interferenzstrahl auszublenden und auf einen zweiten, gleich orientierten Kristall derselben Art zu leiten. Ein auf diese Weise erhaltenes Kristallphotogramm, das wir fernerhin kurz als „sekundäres“ Photogramm bezeichnen werden, kann sich vom „primären“ Photogramm, wie es unter Benützung der gewöhnlichen Röntgenstrahlen erhalten wird, in dreierlei Weise unterscheiden:

1. beide Photogramme stimmen vollkommen überein,
2. einige Punkte fehlen auf dem sekundären Bild,
3. kein einziger Punkt ist auf dem sekundären Bild sichtbar.

Je nach dem Ausfall des Versuches lassen sich folgende Aufschlüsse über die Natur der vom Kristall ausgesandten Strahlung gewinnen:

1. Eine vollkommene Identität beider Photogramme würde beweisen, daß die vom Kristall ausgehende Strahlung schon in der Primärstrahlung enthalten ist, sowie daß alle Interferenzpunkte in bezug auf die Natur der Strahlung untereinander vollkommen gleichwertig sind. Unter diesen Umständen hätte auch eine von anderer Seite ausgesprochene Deutung der

1) Die Veröffentlichung dieser Ostern 1914 abgeschlossenen Arbeit wurde durch militärische Einberufung des Verfassers verzögert.

2) Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wissensch. 1912. p. 303.

Interferenzmaxima als einer selektiven Zerstreuung der Primärstrahlen in kristallographisch ausgezeichneten Richtungen (so genannten Kristallschächten) bedeutend an Wahrscheinlichkeit gewonnen. Nach dieser Hypothese müßte jeder vom Kristall ausgehende Strahl genau denselben Charakter besitzen wie der von der Röntgenröhre kommende Primärstrahl.

2. Würde sich das sekundäre Bild von dem primären durch das Fehlen verschiedener Punkte unterscheiden, so wäre dies ein sicherer Beweis dafür, daß es sich um die Interferenzerscheinungen *verschiedener*, in dem primären Bündel enthaltener Wellenlängen handelt. Alle Punkte, welche nicht mit der ausgesandten Wellenlänge übereinstimmen, müßten auf dem sekundären Photogramm fehlen; das Aussehen desselben wäre wesentlich abhängig von der Wahl des auszublendenden Interferenzstrahls. Ein derartig „*selektiver*“ Charakter des sekundären Photogramms wäre somit ein direkter, experimenteller Beweis für die Richtigkeit der von Laue aufgestellten Theorie.

3. Das negative Ergebnis, daß auf dem sekundären Bild keine Schwärzungsmaxima sichtbar sind, würde die Vermutung nahelegen, daß die vom Kristall ausgehende Strahlung eine Fluoreszenzstrahlung der den Kristall aufbauenden Atome ist. Nach der Stokesschen Regel, die bekanntlich auch im Gebiet der Röntgenstrahlen gilt, ist zur Erregung einer Fluoreszenzstrahlung eine Primärstrahlung von etwas größerer Härte erforderlich; es ist daher nicht zu erwarten, daß die in einem Kristall K_1 angeregte Eigenstrahlung einen zweiten Kristall K_2 derselben Art wieder zur Aussendung von Eigenstrahlung veranlaßt. Jedoch könnte im Fall 3 immerhin der Einwand der Unterexposition geltend gemacht werden.

Von den drei gemeinsam mit Herrn E. Wagner unternommenen Kristallversuchen wurde ein Steinsalzversuch schon früher von ihm veröffentlicht¹⁾ (Referat auf der 85. Naturforscherversammlung 1913), während die beiden anderen Steinsalzversuche in dieser Arbeit aufgeführt sind.

1) E. Wagner, Physik. Zeitschr. 14, p. 1232. 1913.

I. Teil.

§ 2. Versuchsanordnung.

Für den Aufbau der Versuchsanordnung waren folgende Gesichtspunkte maßgebend:

1. Die zu erwartenden großen Expositionszeiten ließen es wünschenswert erscheinen, gleichzeitig zwei Versuche nebeneinander ausführen zu können.

2. Die photographischen Platten mußten durch einen allseitig geschlossenen Bleikasten vor der direkten Strahlung der Röhre, sowie vor den am Boden und an den Wänden des Zimmers entstehenden Sekundärstrahlen vollkommen geschützt werden.

3. Die Öffnungsweite des auszublendenden Strahlenbündels war bestimmt durch zwei (sich entgegenstehende) Forderungen: die Vermeidung allzu großer Divergenzen im Bündel verlangte möglichst kleine Blendenöffnungen, während andererseits aus Intensitätsgründen ein Herabgehen unter einen bestimmten Minimalwert nicht angängig erschien.

4. Es mußte eine Einrichtung geschaffen werden, die es ermöglichte, während eines Dauerversuchs eine etwa unbrauchbar gewordene Röntgenröhre durch eine andere auswechseln zu können, um mit dieser die begonnene Exposition fortzusetzen.

5. Vorversuche hatten gezeigt, daß eine exakte Ausblendung eines Interferenzstrahls nur dann möglich ist, wenn der Ausgangspunkt der Strahlung seine Lage im Raum nicht ändert. Auch die geringen Wanderungen des Brennflecks, die beim Härterwerden der Röhre während des Betriebs häufig auftreten, hatten sich als äußerst störend erwiesen.

Die Forderungen 4 und 5 wurden erfüllt durch Montieren der Röhre auf Holzschlitten, die Verschiebungen nach drei Richtungen gestatteten, sowie durch Aufstellung der unten näher beschriebenen Bleifadenkreuze, die die richtige Lage des Brennflecks ein für allemal genau fixierten. Jede mittels der Fadenkreuze beobachtete Wanderung des Brennflecks wurde durch entsprechende Verschiebung der Röhre auf den Schlitten kompensiert.

Beschreibung der Einzelteile.

Die Bleifadenkreuze. Ein Kriterium zur Erkennung jeder Brennfleckwanderung läßt sich leicht auf folgende Weise gewinnen: Die richtige Lage des Brennpunktes (*A* in Fig. 1) ist

definiert als Schnitt von irgend zwei beliebigen Strahlenbündeln, z. B. AF_1 und AF_2 . Auf zwei in F_1 und F_2 befindlichen Fluoreszenzschriften erscheint das durch die Öffnungen O_1 und O_1' erzeugte Bild der Brennellipse; vor jedem Fluoreszenzschild war ein Bleifadenkreuz so angebracht, daß bei richtiger Stellung des Brennflecks der Schatten des Kreuzes auf dem Schirm genau durch den Schwerpunkt der hellen Ellipse ging.

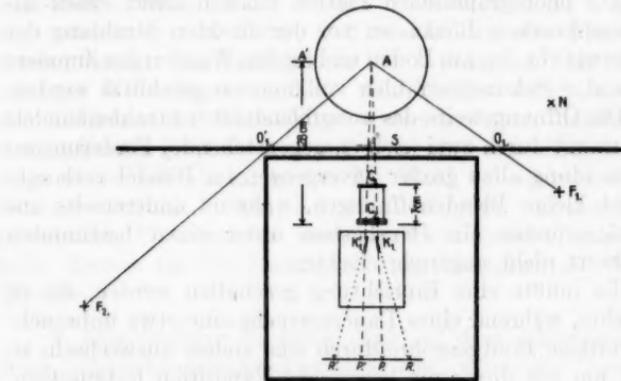


Fig. 1. Lageplan.

Die Doppelblende. Entsprechend der oben unter 1. aufgestellten Forderung (gleichzeitige Ausführung zweier Versuche) mußten zwei Strahlenbündel von der gleichen Öffnungsweite ausgeblendet werden. Es erschien nützlich, zunächst durch eine Blende C_1 (Fig. 1) die von der Glaswand der Röhre ausgesandte Sekundärstrahlung abzuhalten und dann erst in einem Abstand eine zweite, engere Blende C_2 aufzustellen, die dann die eigentliche Begrenzung der den Kristall treffenden beiden Strahlenbündel bildete. Beide Blenden C_1 und C_2 durften natürlich ihre gegenseitige Lage nicht ändern; deshalb wurde die Vorrichtung zur Ausblendung beider Strahlen durch je zwei Blenden so ausgeführt, daß sie aus einem Stück bestand: ein 55 mm langes Messingrohr von 40 mm Durchmesser, das auf einem Dreifußstativ horizontal befestigt war, war an beiden Enden mit Bleischeiben verschlossen, deren Tiefe 4 mm bzw. 8 mm betrug. In diese Scheiben wurden zwei schiefe Kanäle so hineingebohrt, daß die Verlängerungsrichtungen der Boh-

rungen sich in einem von C_1 um 21 cm entfernten Punkt A (Ort der Antikathode) schnitten. Die Bohrlöcher befanden sich auf dem horizontalen Durchmesser der beiden Scheiben, so daß die ausgeblendeten Strahlen in einer Horizontalebene verliefen. Als sehr wesentlich für das Gelingen der Versuche erwies sich die passende Wahl der Durchmesser der Bohrungen. In dem Bestreben, möglichst parallele Strahlen zu erhalten, wurden zunächst die Öffnungen sehr klein gewählt, nämlich 1,2 mm bei C_1 und 0,7 mm bei C_2 . Die für primäre Aufnahmen nötigen Expositionszeiten waren jedoch so groß, daß mehrmals eine Erweiterung der Bohrlöcher vorgenommen wurde, so daß die endgültigen Werte 2,8 bzw. 1,8 mm betrugen. Mit diesem Gewinn an Intensität war zwar der Umstand verknüpft, daß die benützten Strahlenbündel nunmehr aus ziemlich divergenten Strahlen bestanden. Es wird jedoch später gezeigt werden, daß diese Divergenzen sich keineswegs als störend erwiesen haben.

Der Kristalltisch. Die Aufstellung der vier Kristalle auf einer Messingplatte, die auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Dreifuß ruhte, garantierte eine größere Stabilität der Anordnung, als wenn jeder einzelne Kristall auf einem besonderen Stativ (Goniometer) angebracht worden wäre. Dadurch, daß die Unterlagscheiben dieser drei Stellschrauben ebenso wie der Dreifuß der Doppelblende, mit Wachskitt auf einer Marmorplatte angekittet wurden, wurde erreicht, daß das System Doppelblende-Kristalltisch auf äußere Einwirkungen (z. B. Erschütterungen) nur als Ganzes reagieren konnte. Diese Unverrückbarkeit der einzelnen Teile gegen einander war insofern äußerst wichtig, als bei der geringsten Änderung der Stellung der Doppelblende gegenüber den Kristallen K_1 und K_1' der Winkel, unter dem die Primärstrahlen auf die Kristalle K_1 und K_1' auftrafen, geändert worden wäre; dann wäre der seine Richtung entsprechend ändernde Interferenzstrahl durch die 1,8 mm weite Blende O bzw. O' (Fig. 2) nicht mehr hindurchgegangen. Der zwischen den beiden Kristallpaaren K_1 bzw. K_1' und K_2 bzw. K_2' befindliche Bleischirm LMN diente zweierlei Zwecken: erstens sollte dadurch der Primärstrahl sowie alle sonstigen Interferenzstrahlen außer R und R' abgehalten werden, und zweitens sollte die 1,8 mm große Öffnung bei O bzw. O' die Divergenz des auf die hinteren Kristalle K_2

bzw. K_2' geleiteten Interferenzstrahls etwas einschränken. Die Aufstellung mittels drei kleiner Messingspitzen bei L, M, N, die in drei auf der Messingplatte festgekittete Unterlagscheiben paßten, ermöglichte ein leichtes Abnehmen des Schirms, wenn die Kristalle aufgesetzt und eingestellt wurden, und garantierte zugleich nach dem Wiederaufsetzen ein exaktes Erreichen der alten Stellung. — Um die Unverrückbarkeit der

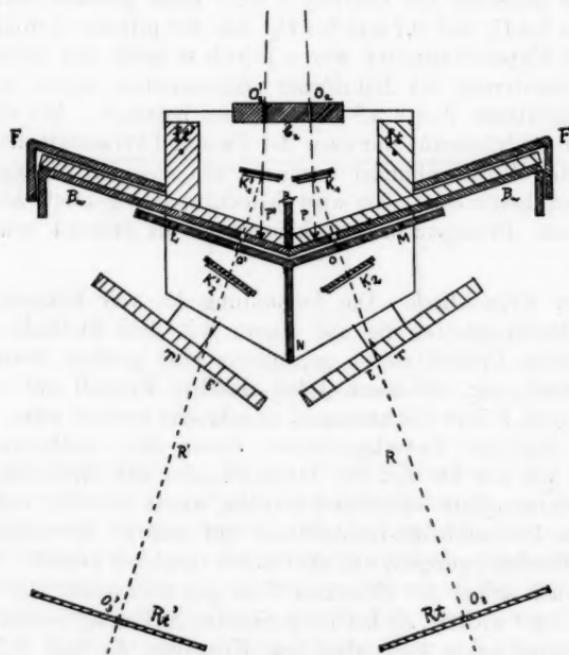


Fig. 2. Aufsicht ($\frac{1}{3}$ nat. Größe).

photographischen Platten gegenüber den hinteren Kristallen K_2 und K_2' zu sichern, schien es ratsam, die Plattenträger T und T' je mittels eines Messingarmes an der Tischplatte zu befestigen.

Innerer Bleischutz. Obgleich der eigentliche Versuchsräum, in dem sich Doppelblende und Kristalltisch befanden, durch einen Bleikasten von 3 mm Wandstärke, sowie durch einen Bleischirm vor jeder direkten und indirekten Röntgen-

strahlung geschützt war, trat doch bei den langen Expositionszeiten eine ziemlich starke Beschleierung der photographischen Platten auf. Deshalb wurden die Platten mitsamt den hinteren Kristallen mit einem weiteren Bleigehäuse umgeben (in Fig. 2 ist nur die Vorderwand B_w gezeichnet). Den Bleischirm LMN als Vorderwand des Bleikastens auszubilden, erschien nicht ratsam, weil die beiden Blenden O und O' — der empfindlichste Teil der Versuchsanordnung — vor jeder Lagenänderung unbedingt bewahrt werden mußten. Zur Erhöhung der Stabilität war die Bleiwand B_w unten mit einer Messingleiste verstärkt; durch zwei Bohrungen bei St und St' , in die zwei auf der Platte des Kristalltisches angelötete Stifte hineinpaßten, wurde ein Erreichen der alten Stellung beim Wiederaufsetzen garantiert, wenn die Bleiwand zwecks Einstellung der vorderen Kristalle abgehoben werden mußte. Wie Fig. 2 zeigt, waren die Ränder der Bleiwand nach hinten umgebogen, so daß eine Art von Falz entstand; das übrige Bleigehäuse konnte mittels eines Holzschlittens von hinten so hereingeschoben werden, daß zwei der Seitenwände genau in diesen Falz hineinpaßten. Zwei in die Hinterwand gebohrte Öffnungen erlaubten den Interferenzstrahlen R und R' , einen ungehinderten Austritt, um zu verhüten, daß dieselben beim Auftreffen auf Blei Sekundärstrahlung erzeugen könnten.

Das Justieren der Blenden O und O' (Fig. 2). Auf der der Röhre zugekehrten Fläche OM bzw. $O'L$ wurde eine photographische Platte, mit Schichtseite gegen das Blei, derart befestigt, daß sie mit zwei dort angebrachten Stiften zum Anschlag kam. Während der $\frac{1}{4}$ stündigen Exposition wurde durch wiederholte Beobachtungen an den Fadenkreuzen die Konstanz des Brennflecks auf der Antikathode kontrolliert. Nach der Entwicklung und Trocknung wurden die Platten wieder mit den Stiften zum Anschlag gebracht und dann die Stelle der Schwärzung auf dem Bleischirm bezeichnet; die Richtigkeit der hierauf vollzogenen Bohrung wurde durch eine Aufnahme mit Röntgenstrahlen geprüft.

Die photographischen Platten. Um die großen Expositionszeiten tunlichst herabzusetzen, wurde experimentell untersucht, durch welche Mittel ein möglichst großer Bruchteil der gesamten Strahlungsenergie in photographisch wirksame Energie umgewandelt werden könnte. Als Resultat dieser Vorversuche ergab

sich eine Erhöhung der Schiehtdicke der photographischen Platten; der hierdurch erzielte Gewinn an Schwärzung wurde photometrisch auf das $1\frac{2}{3}$ fache bestimmt (verglichen mit einer gleichzeitig exponierten gewöhnlichen Röntgenplatte). Die anfangs häufig auftretende Beschleierung dieser extra dicken Platten, deren Herstellung wir dem liebenswürdigen Entgegenkommen des Herrn Dr. Hauff (Feuerbach) verdanken, ließ sich durch zweckmäßige Entwicklung vermeiden. Bei den Kristallaufnahmen wurden mehrere Platten dicht hintereinander in einem Messingrahmen eingespannt; nach dem Entwickeln wurden sie in der gleichen Weise wieder aufeinandergelegt, so daß sich beim Hindurchsehen die Schwärzungen addierten und mit ausgeruhtem Auge sogar äußerst geringe Schwärzungseindrücke sicher identifiziert werden konnten.

§ 3. Versuche mit Steinsalz.

Um festzustellen, welche Expositionszeiten bei den beabsichtigten Kristallversuchen angewandt werden mußten, wurde folgender Versuch mit Gipskristallen angestellt: Da nach den Mitteilungen verschiedener Autoren das von der Hauptspaltfläche des Gipses bei streifender Inzidenz reflektierte Röntgenstrahlbündel beträchtliche Intensität besitzt, so wurden bei K_1 und K_2 (Fig. 2) zwei Gipsspaltstücke so aufgestellt, daß ihre Spaltflächen von den Strahlen P bzw. R je unter einem Winkel von $6\frac{1}{2}^{\circ}$ getroffen wurden. Nach 14stündiger Exposition war auf der hinter K_2 befindlichen photographischen Platte gerade noch der sehr schwache Schwärzungseindruck des an der Spaltfläche von K_2 reflektierten Strahles erkennbar; von sonstigen Punkten war keine Spur zu sehen.

Statt die Versuche mit Gips bei längerer Expositionsduauer zu wiederholen, schien es nützlicher, zu einem der regulären Klasse angehörigen Kristall überzugehen, bei dem sich eine Berechnung der auf dem sekundären Photogramm sichtbaren Punkte leichter ausführen ließ. Bei der in Fig. 2 gezeichneten Orientierung der Steinsalzkristalle K_1 und K_1' zeichneten sich fünf Interferenzpunkte durch besonders starke Schwärzung aus¹⁾; die Winkel zwischen Primärstrahl und einer Würfel-fläche betragen

1) Vgl. Tafel IV, Nr. 1.

bei $K_1 9^{\circ} 03'$ und bei $K'_1 8^{\circ} 40'$

, , $K_2 7^{\circ} 01'$ „ „ $K'_2 9^{\circ} 22'$.

Die Einstellung der Kristalle erfolgte auf optischem Weg.

Resultate.

Nach 11stündiger Exposition waren außer der sehr starken Schwärzung des direkt durch den Kristall gegangenen Strahls R bzw. R' auf jeder Platte noch je zwei schwache kreisförmige Schwärzungen I und II und je neun elliptische Schwärzungsflecken zu beobachten; von den letzteren waren einige sehr stark, während mehrere von ihnen nur beim Aufeinanderlegen der drei Platten erkannt werden konnten. Die kreisförmigen Schwärzungen konnten leicht durch Bestimmung ihrer Lage identifiziert werden: das eine Paar I rührte her von dem Primärstrahl P bzw. P' , der in dem 8 mm dicken Bleischirm¹⁾ LMN noch nicht vollkommen absorbiert worden war, während das andere Paar II durch eine Sekundärstrahlung der Ränder der Blendenlöcher O_2 bzw. O'_2 (Fig. 2), die durch die Öffnungen O und O' dringen konnte, verursacht worden war. Durch eine Vergleichung der Platten mit den „primären“ Photogrammen, die in möglichst gleicher Orientierung der Kristalle aufgenommen wurden, konnten sämtliche elliptische Schwärzungen als echte Interferenzpunkte identifiziert werden. Ein Blick auf die Fig. 5a und 5b, sowie 6a und 6b, die eine graphische Darstellung der auf den photographischen Platten sichtbaren Punkte geben, zeigt sofort, daß das „sekundäre“ Photogramm ausgesprochen „selektiven“ Charakter besitzt und daß also der ausgeblendete Interferenzstrahl unmöglich wesensgleich mit dem Primärstrahl sein kann. Die in der Einleitung unter 1. und 3. diskutierten Annahmen von einer Zerstreuung der Primärstrahlung in kristallographisch ausgezeichneten Richtungen bzw. von einer Eigenstrahlung der den Kristall aufbauenden Atome oder Moleküle sind also auf Grund dieses Versuchsergebnisses zu verwerfen. Dagegen wird durch den „selektiven“ Charakter des Photogramms zunächst *qualitativ* die Richtigkeit der zuerst von Laue aufgestellten Theorie experimentell bewiesen, daß nämlich die verschiedenen Punkte auf den Photogrammen von *verschiedenen* im Primärstrahl enthaltenen Wellenlängen herrühren. Im folgenden wird gezeigt

1) Der innere Bleischutz B_w war bei diesen Versuchen noch nicht vorhanden.

werden, daß das experimentelle Resultat aber auch *quantitativ* bis in die kleinsten Einzelheiten mit dem von der Interferenztheorie geforderten Ergebnis übereinstimmt.

Berechnung der Photogramme.

Nach den in den Arbeiten von Wulff¹⁾, W. H. und W. L. Bragg²⁾ entwickelten Anschauungen können die Richtungen der von einem Kristall ausgehenden Interferenzstrahlen dadurch gefunden werden, daß man sich das primäre Strahlenbündel an allen möglichen Netzebenen des dem Kristall zugrundeliegenden Raumgitters reflektiert denkt: Wird eine Ebene (Netzebenenabstand d) von einem Strahlenbündel unter dem Winkel ψ getroffen (ψ = Winkel zwischen Strahl und Normale), so wird nur eine einzige Wellenlänge (und deren Submultipla) reflektiert, die der Beziehung genügt

$$(1) \quad n \cdot \lambda = 2 d \cdot \cos \psi,$$

wobei $n = 1,2 \dots$ zu setzen ist. Der für $n = 1$ aus dieser Formel berechnete Wert wird fernerhin als „Grundwellenlänge“ bezeichnet werden, entsprechend die für $n = 2$ bzw. $n = 3$ sich ergebenden Werte als 1. bzw. 2. Oberton. Obgleich diese Reflexionsauffassung in mancher Beziehung³⁾ dem physikalischen Sachverhalt nicht in dem Maße entspricht wie die Interferenztheorie, so ist sie doch den folgenden Ausführungen deshalb zugrunde gelegt worden, weil auf ihr eine sehr einfache graphische Methode der Indizesbestimmung beruht: es ist nicht nur möglich, aus dem erhaltenen Photogramm die für die Berechnung der Wellenlängen notwendigen *genauen* Werte der Winkel des Primärstrahls zu bestimmen, sondern auch für eine gegebene Orientierung des Kristalls von vorneherein das zu erwartende Photogramm zu konstruieren.

Die Berechnung der Photogramme gliederte sich in zwei Teile:

1. Zunächst wurde für jeden Punkt auf dem Photogramm bestimmt, welcher Netzebene (n_1, n_2, n_3) derselbe zuzuordnen ist.

1) Phys. Zeitschr. 14, p. 217. 1913.

2) Proc. of the Roy. Soc. 88, p. 428. 1913.

3) Z. B. liegt der Grund dafür, daß Netzebenen mit niedrigen Indizes so starke Interferenzmaxima liefern an ihrem geringen spektralen Auflösungsvermögen (Lorentz) und nicht — wie W. L. Bragg auf Grund seiner Reflexionsanschauung vermutete — in der dichteren Besetzung mit Molekülen bzw. Atomen.

2. Hierauf wurde aus Formel (1) die ihm zukommende Grundwellenlänge berechnet.

1. Das von W. L. Bragg¹⁾ zur Bestimmung der Indizes angegebene graphische Verfahren beruht auf folgendem Satz: „Der geometrische Ort für alle von „tautozonalen“ Ebenen reflektierte Strahlen ist die Mantelfläche eines Kegels, dessen Spitze in dem Punkt liegt, in dem der Kristall vom Primärstrahl getroffen wird, dessen Achse die betreffende Zonenachse bildet und dessen Öffnungswinkel gleich dem Winkel zwischen Primärstrahl und Zonenachse ist.“ („Tautozonal“ heißen bekanntlich die einer kristallographischen Zone angehörenden Ebenen, d. h. solche Ebenen, die sich in parallelen Kanten schneiden.)

I. Die Art und Weise der Indizesbestimmung möge zunächst an einem einfachen Beispiel noch etwas eingehender behandelt werden: Ein Steinsalzspaltstück war so aufgestellt, daß der in einer Würfelebene verlaufende Primärstrahl mit den beiden anderen Würfelebenen Winkel von 17° ($= \frac{1}{2}\varphi$ in Fig. 3) bzw. 73° bildete. Denken wir uns ein im Kristall festes Koordinatensystem, dessen drei Achsen den drei Würfelkanten parallel gehen, so ist aus Fig. 3 ersichtlich, daß nur der Zonenkegel, dessen Achse die X-Achse ist, von einer parallel zum Kristall aufgestellten photographischen Platte in einer Kreisfigur geschnitten wird. Nach dem Vorgang von W. L. Bragg sind jedoch unter Benützung einer stereographischen Projektion auch die übrigen Kegelschnitte in den Figuren als Kreise gezeichnet worden.

Von den vielen möglichen Zonenachsen genügt es, die in der XY-Ebene und XZ-Ebene liegenden zu zeichnen. Da durch die Indizes das Verhältnis der Koordinaten jedes auf der betreffenden Zonenachse gelegenen Punktes gegeben ist, so hat der Punkt M_1 (Fig. 3), in dem z. B. die Zonenachse [210] die von dem Kristall K um A cm entfernte photographische Platte G trifft, von M_0 (Treffpunkt der X-Achse) einen Abstand $= A/2$ (gemessen in Richtung der Y-Achse). Indem man in den Aus-

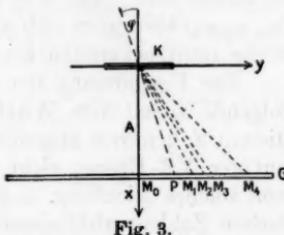


Fig. 3.

1) Proc. of the Roy. Soc. 89. p. 248. 1913.

druck $K/h \cdot A$ für K und h der Reihe nach die einfachsten ganzen Zahlen einsetzt, erhält man die Schnittpunkte der übrigen in der XY -Ebene liegenden Zonenachsen.

In ähnlicher Weise findet man die auf der Z -Achse liegenden Schnittpunkte der in der XZ -Ebene verlaufenden Zonenachsen. In Fig. 4, deren Zeichenebene der Ebene der photographischen Platte entspricht, bedeutet M_0 wieder den Treffpunkt der X -Achse und P den Durchstoßpunkt des Primärstrahls; die Entfernung PM_0 ist aus Fig. 3 ersichtlich $r = A \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

Den um M_0 mit Radius r beschriebenen Kreis wollen wir fernerhin als „Hauptkreis“ bezeichnen, da er der wichtigen Zone [100] entspricht und bei den meisten Aufnahmen die weitaus intensivsten Interferenzpunkte enthält. Außer den auf dem Hauptkreis gelegenen Punkten sind sämtliche Punkte bestimmt, als Schnitt von zwei Zonenkreisen, deren Mittelpunkte auf der Y - bzw. Z -Achse liegen und die alle durch P zu ziehen sind. Die dem Schnittpunkt zukommenden Indizes (η_1, η_2, η_3) berechnen sich aus den Symbolen der beiden Zonenkreise nach bekannten kristallographischen Formeln.

Zur Bestimmung der Punkte auf dem Hauptkreis dient folgende zuerst von Wulff¹⁾ angegebene Konstruktion: Alle diesem Zonenkreis angehörenden Netzebenen stehen senkrecht auf der YZ -Ebene; zieht man durch M_0 eine Anzahl Gerade von solcher Richtung, daß ihre Achsenabschnitte in sehr einfachen Zahlenverhältnissen zu einander stehen, so erhält man damit direkt die Spuren der wichtigsten Netzebenen. Das Lot von P auf diese Spuren schneidet den Hauptkreis in den gesuchten Interferenzpunkten. Da die Achsenabschnitte der Ebenennormalen den Indizes direkt proportional sind, genügt es bei der Konstruktion, unter Weglassung der Spuren, durch P alle möglichen Richtungsgeraden mit einfachen Achsenverhältnissen zu zeichnen. Diese Methode der Richtungsgeraden kann auch auf die übrigen Punkte angewandt werden; für die praktische Anwendung hat sich eine Kombination dieser Methode mit der der Zonenkreise als sehr nützlich erwiesen; es werden nur die wichtigsten Zonenkreise gezeichnet (da durch die Zeichnung sämtlicher Zonenkreise die Übersichtlichkeit der Figur stark beeinträchtigt wird) und dann werden auf ihnen durch Ziehen der Richtungsgeraden durch P die

1) Physik. Zeitschr. 14. p. 217 u. 783. 1913.

betreffenden Punkte bestimmt. Fig. 4 zeigt die Konstruktion der wichtigeren Punkte¹⁾ in $\frac{3}{4}$ natürlicher Größe (Winkel $\varphi = 17^\circ$, Plattenabstand $A = 92$ mm). Die Tatsache, daß die Einfallsebene eine Symmetriebene des Kristalls ist, bewirkt, daß mit Ausnahme der der Y-Achse angehörenden Punkte immer zwei gleichwertige zu dieser Achse symmetrisch gelegene Punkte auftreten.

II. Wir wollen nun zu dem Fall übergehen, wo der Primärstrahl nicht mehr in einer Würfelebene verläuft; die eben erwähnte Symmetrie der Photogramme ist dann nicht mehr vorhanden. Dieser Fall läßt sich dadurch realisieren, daß der in Fig. 3 gezeichnete Kristall um die nunmehr „raumfest“ gedachte Y-Achse um einen Winkel δ gedreht wird; eine derartige Drehung um die Y-Achse soll fernerhin kurz als „Neigung“ bezeichnet werden. Im Fall I (ohne Neigung) betrugen die Richtungskosinus des Primärstrahls mit der Y-X-Achse

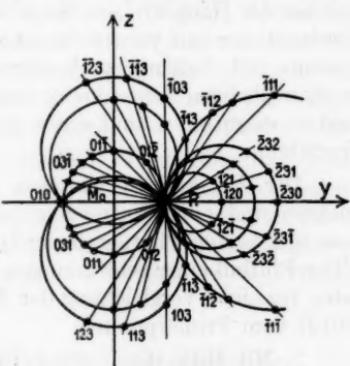


Fig. 4.

$$(2a) \left\{ \begin{array}{l} \cos(PX) = a_0 = \cos \varphi, \quad \cos(PY) = \beta_0 = \sin \varphi, \\ \qquad \qquad \qquad \cos(PZ) = \gamma_0 = 0. \end{array} \right.$$

Im Fall II benützen wir als Koordinatensystem (X' , Y' , Z') wieder die drei Würfelkanten des nunmehr „geneigten“ Kristalls. Die Richtungskosinus des Primärstrahls gegenüber diesen Achsen berechnen sich aus bekannten Formeln der analytischen Geometrie und lauten

$$(2b) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \cos \varphi \cos \delta \\ \beta_0 = \sin \varphi \\ \gamma_0 = -\cos \varphi \sin \delta. \end{array} \right.$$

Auf einer zum Kristall parallelen Platte im Abstand A hat dann der Primärpunkt P die Koordinaten:

1) Die bei jedem Punkt angeschriebenen Zahlen bedeuten die Indizes der ihm entsprechenden Netzebene.

$$(3) \quad \begin{cases} y' = \frac{A}{a_0} \beta_0 = \frac{A \operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta} \\ z' = \frac{A}{a_0} \gamma_0 = - A \operatorname{tg} \delta. \end{cases}$$

Die verschiedenen Kreismittelpunkte liegen wie im Fall I. auf den Spuren der Würfelflächen, d. h. auf der Y' und Z' -Achse; dagegen hat der Primärpunkt P eine Senkung in vertikaler Richtung um den Betrag $h = A \cdot \operatorname{tg} \delta$ erfahren. Die Verbindungsline von P mit (010) ist jetzt nicht mehr ein Durchmesser des Hauptkreises; die sehr geringe Änderung des Hauptkreisradius r darf vernachlässigt werden. Um ein solches Photogramm mit Neigung zu konstruieren, hat man also in einem rechtwinkeligen Achsenkreuz einen Punkt P mit obigen Koordinaten einzutragen und dann genau wie im Fall I weiter zu verfahren.

Der Unterschied zwischen einer „symmetrischen“ Aufnahme und einer „geneigten“ Aufnahme ist klar ersichtlich aus den beiden Photogrammen¹⁾ Nr. 3 und Nr. 4 auf Tafel V. (Der Einfluß einer sehr geringen Neigung äußert sich am stärksten bei einer Vergleichung der Abstände der Punkte (012) und (012) vom Primärpunkt.)

2. Mit Hilfe dieser nunmehr bekannten Indizes berechnet sich der Reflexionswinkel ψ der Röntgenstrahlen an der betreffenden Netzebene aus der Gleichung

$$(4) \quad \cos \psi = \frac{a_0 \eta_1 + \beta_0 \eta_2 + \gamma_0 \eta_3}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}$$

und der Netzebenenabstand

$$(5) \quad d = \frac{a}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}},$$

wobei a die Kantenlänge des Elementarwürfels bedeutet.

Somit ergibt sich aus (1) die Endformel für $n = 1$

$$(6) \quad \lambda_0 = \frac{a_0 \eta_1 + \beta_0 \eta_2 + \gamma_0 \eta_3}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} \cdot 2a$$

eine Gleichung, die auch unmittelbar aus den Laueschen Formeln folgt.

1) Die elliptische Gestalt des „Hauptkreises“ röhrt davon her, daß bei diesen Aufnahmen die photographische Platte senkrecht zum Primärstrahl aufgestellt war.

Im Fall I ($\gamma_0 = 0$) bewirkt das Fehlen des 3. Index im Zähler, daß die zur Y-Achse symmetrischen Punkte die gleiche Wellenlänge haben, während sie im Fall II¹⁾ einen Wellenlängenunterschied besitzen

$$\Delta \lambda_0 = \left| \frac{2 \cos \varphi \sin \delta \eta_3}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} \right| \cdot 2 a.$$

Da $\Delta \lambda_0$ dem Index η_3 direkt proportional ist und da im Allgemeinen die Punkte, deren Richtungsgerade mit der Z-Achse geringe Winkel bilden, relativ großes η_3 besitzen, so werden sich bei ihnen auf den „sekundären“ Photogrammen derartige Verschiedenheiten in der Wellenlänge bei geringer Neigung am ehesten bemerkbar machen; auf Fig. 5 b ist z. B. $1\bar{2}\bar{2}$ außerordentlich deutlich zu sehen, während $1\bar{2}\bar{2}$ vollständig fehlt.

Die in Formel (6) ausgesprochene Forderung, daß jeder Punkt auf dem Photogramm nur von einer einzigen Wellenlänge bzw. deren Ober tönen erzeugt wird, läßt sich nun durch Berechnung der primären und sekundären Steinsalzphotogramme einer quantitativ genauen experimentellen Prüfung unterziehen.

Quantitative Auswertung der Steinsalzaufnahmen.

Die Bestimmung der drei zur Konstruktion der Photogramme nötigen Größen 1. Plattenabstand A , 2. Winkel der „Drehung“ φ , 3. Winkel der „Neigung“ δ , geschah in folgender Weise:

1. Nach Beendigung der Daueraufnahme wurde vor der Abnahme der Platten der Abstand A zwischen Kristall und der vordersten der photographischen Platten mit einer Schublehre so genau als möglich gemessen.

2. Unter Benützung dieses Wertes A wurde aus dem auf der Platte gemessenen Radius r des Hauptkreises der Winkel φ berechnet (aus $\operatorname{tg} \varphi = r/A$).

3. Der sehr geringe Neigungswinkel δ wurde mit Hilfe einer kleinen Konstruktion gefunden, durch welche zunächst die Senkung des Primärpunktes unter die Y-Achse, die nach Gleichung (3) $h = A \operatorname{tg} \delta$ beträgt, ermittelt wurde.

1) Vgl. Gl. (2b).

Erster Steinsalzversuch.

Zunächst möge die in Fig. 5a und 5b dargestellte Aufnahme behandelt werden, wo der vordere (K_1') und der hintere Kristall (K_2') dem einfallenden Strahl gegenüber annähernd gleich orientiert waren. Die aus den Platten ermittelten Daten betragen für K_2' :

$$A = 30 \text{ mm} \quad 2r = 9,9 \text{ mm} \quad \text{hieraus } \varphi = 9^{\circ} 22' \text{ und } \delta = 85'.$$

Unter Benützung dieser Werte wurden nach dem oben erwähnten graphischen Verfahren die Indizes ermittelt, welche in Fig. 5a

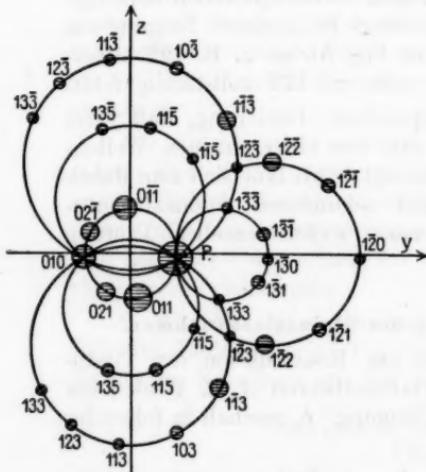


Fig. 5a. Primäres Photogramm.

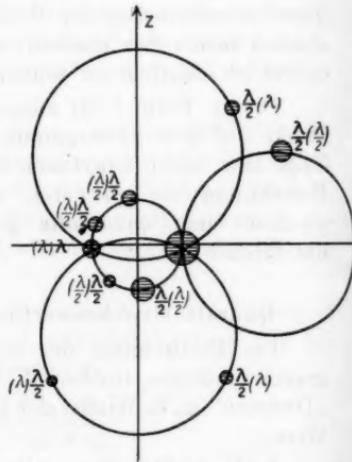


Fig. 5b. Sekundäres Photogramm.

den betreffenden Punkten beigeschrieben sind. Hierauf wurde aus der Formel¹⁾

$$n\lambda = \frac{\cos \varphi \cos \delta \eta_1 + \sin \varphi \eta_2 - \cos \varphi \sin \delta \eta_3}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} \cdot 2a,$$

die jedem Punkt (η_1, η_2, η_3) für $n = 1$ zukommende Grundwellenlänge berechnet. Für die auf dem sekundären Photogramm sichtbaren Punkte sind diese Werte in folgender Tabelle zusammengestellt, wobei a die Kantenlänge des Elementarwürfels eines einfachen kubischen Raumgitters bedeutet:

1) Erhalten aus Gleichungen (2b) und (6).

Tabelle I.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|----------------------------|---------------------------------|--------|---------------------------------|
| A. $\bar{1}\bar{2}\bar{2}$ | 75,9 | B. 011 | 76,0 |
| 133 | 75,9 | 010 | 162,0 |
| 113 | 77,7 | 021 | 66,8 |
| 113 | 72,2 | 011 | 86,0 |
| | | 021 | 62,8 |

Ein Blick auf Tabelle I zeigt, daß alle Wellenlängen sich gruppieren um zwei charakteristische Werte, die im Verhältnis 1:2 stehen, nämlich um etwa 75,5 und 151. Die vom vorderen Kristall K'_1 ausgesandte Wellenlänge λ_0 kann in derselben Einheit (2a) ausgedrückt werden, da ja beide Kristalle dasselbe Raumgitter besitzen. Da für $K'_1 \neq \varphi = 8^\circ 40'$ war, so ergibt sich

$$\text{für } n = 1 \quad \lambda_0 = \sin 8^\circ 40' \cdot 2a = 151 \cdot 2a \cdot 10^{-3},$$

$$\text{für } n = 2 \quad \frac{\lambda_0}{2} = 75,5 \cdot 2a \cdot 10^{-3}.$$

Dies sind aber genau die charakteristischen Werte von oben.

Das Prinzip der „Selektivität“ des sekundären Photogramms beruht also darauf, daß nur die Punkte sichtbar sind, die nahezu mit der ausgesandten Wellenlänge λ_0 bzw. $\lambda_0/2$ dem ersten Oberton übereinstimmen. Im Anschluß daran erhebt sich sofort die Frage: Wie genau muß die Übereinstimmung mit λ_0 bzw. $\lambda_0/2$ sein, damit der betreffende Punkt auf dem sekundären Photogramm erscheint? Zur Beantwortung dieser Frage berechnen wir die prozentuale Abweichung der dem einzelnen Punkt zukommenden Grundwellenlänge von den Werten für λ_0 bzw. $\lambda_0/2$.

Tabelle II.

| Index | Abweichung in % | Index | Abweichung in % |
|----------------------------|------------------------|--------|------------------------|
| A. $\bar{1}\bar{2}\bar{2}$ | 0,5% von $\lambda_0/2$ | B. 011 | 0,7% von $\lambda_0/2$ |
| 133 | 0,5% „ „ „ | 010 | 7,3% „ λ_0 |
| 113 | 3,0% „ „ „ | 021 | 11,5% „ $\lambda_0/2$ |
| 113 | 4,3% „ „ „ | 011 | 13,9% „ „ „ |
| | | 021 | 16,8% „ „ „ |

Die berechneten Abweichungen stimmen mit dem experimentellen Befund sehr gut überein: Denn aus Fig. 5b, in der die Schwärzungsverhältnisse der einzelnen Punkte auf der photographischen Platte durch verschiedene große Kreise dargestellt sind, ist ersichtlich, daß z. B. $1\bar{1}3$ (Abweichung 4,8%) nicht so stark geschwärzt ist als $1\bar{1}3$ (Abweichung 3%); ferner muß der sehr intensive Punkt $1\bar{2}\bar{2}$ sich nur wenig von $\lambda_0/2$ unterscheiden, was tatsächlich durch die Rechnung in Tabelle II bestätigt wird. Vor einer weiteren Diskussion der in Tabelle II enthaltenen Resultate möge zunächst noch für alle übrigen, auf der primären Aufnahme bei mäßig langer Expositionszeit sichtbaren Punkte die Grundwellenlänge berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt werden:

Tabelle III.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|-------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|
| $1\bar{3}0$ | 50,1 | $10\bar{3}$ | 102,0 |
| $1\bar{3}1$ | 46,4 | 113 | 102,0 |
| $1\bar{3}1$ | 44,6 | $1\bar{1}3$ | 107,0 |
| $1\bar{3}3$ | 27,9 | 123 | 91,5 |
| $1\bar{3}3$ | 24,7 | $1\bar{2}3$ | 95,8 |
| $1\bar{2}0$ | 132,0 | $1\bar{3}3$ | 79,1 |
| $1\bar{2}1$ | 112,0 | 115 | 40,7 |
| $1\bar{2}1$ | 109,0 | $1\bar{1}5$ | 44,4 |
| $1\bar{2}2$ | 71,4 | 135 | 40,6 |
| $1\bar{2}3$ | 49,5 | $1\bar{3}5$ | 43,5 |
| $1\bar{2}3$ | 45,2 | $1\bar{1}5$ | 32,4 |
| 103 | 95,7 | $1\bar{1}5$ | 28,7 |

Divergenzeinfluß: Diejenigen Punkte in Tabelle III, die sich den charakteristischen Werten am meisten nähern, sind $1\bar{2}\bar{2}$ und $1\bar{3}3$. Ihre Abweichung von $\lambda_0/2$ beträgt 5,3% bzw. 4,8%; sie ist also größer als die der sämtlichen in Tabelle II A zusammengestellten Punkte. Daß die in Tabelle II B enthaltenen Punkte trotz relativ sehr großer Abweichungen doch schwach auf dem sekundären Photogramm sichtbar wurden, erscheint zunächst sehr merkwürdig. Ein Blick auf das Photogramm Nr. 1 Tafel IV zeigt jedoch, von welch überragender Intensität die Punkte 010, 011 usw. schon auf der primären Aufnahme sind; ferner ist zu bemerken, daß der Punkt $1\bar{3}3$,

der auf Photogramm Nr. 1 nur schwach sichtbar ist, auf dem sekundären Photogramm ebensogut zu sehen ist wie 021. Es geht daraus hervor, daß bei monochromatischem Röntgenlicht die Intensität der Interferenzstrahlen um so größer ist, je niedriger die Indizes der entsprechenden Netzebene sind. Derartige Erscheinungen sind in einer während der Ausführung dieser Versuche erschienenen theoretischen Arbeit von P. Debye¹⁾ folgendermaßen erklärt worden:

1. Das spektrale Auflösungsvermögen der einzelnen Netzebenen ist nicht gleich groß, sondern wächst mit zunehmendem Wert der Indexquadratsumme S (Lorentz).
2. Infolge der Wärmebewegung ist jeder Interferenzstrahl geschwächt um den Betrag $e^{-\text{const. } S}$ (Debye).

Auch bei den späteren Aufnahmen nehmen die Punkte der Abteilung B immer eine Ausnahmestellung ein, insofern sie bei relativ großen Abweichungen immer noch schwach auf dem sekundären Photogramm erscheinen, während sich für alle übrigen Punkte eine bestimmte obere Grenze der Abweichung angeben läßt, etwa $\pm 4\frac{1}{2}\%$, jenseits deren die Punkte nicht mehr erscheinen. Der Wert von $4\frac{1}{2}\%$ deckt sich annähernd mit dem Divergenzbereich des benützten Röntgenstrahlbündels, wie er sich unter Annahme eines 3 mm großen Brennflecks aus den Dimensionen der Blenden und aus dem Abstand der Antikathode von den Blenden ergibt. Eine Berechnung des Brennflecks aus den bei den Fadenkreuzaufnahmen erhaltenen Ellipsen liefert einen etwas größeren Wert für den Brennfleckdurchmesser; aus der Schwärzungsteilung in den Ellipsen ist ersichtlich, daß die Ränder des Brennflecks lange nicht so stark strahlen wie der zentrale Teil. Auf die Wirkung derartig peripherer Strahlen von relativ geringer Intensität ist zweifellos das Erscheinen der Punkte 011 und 021 zurückzuführen.

Unter Vorwegnahme der Resultate der folgenden Versuche läßt sich über den Divergenzeinfluß folgender Erfahrungssatz aussprechen: „Punkte, deren Indexquadratsumme größer als 5 ist, erscheinen bei der benützten Versuchsanordnung und einer Expositionszeit von etwa 20 Stunden nur dann auf dem sekundären Photogramm, wenn ihre Abweichungen von der aus-

1) Ann. d. Phys. 43. p. 84. 1914.

gesandten Wellenlänge bzw. deren Obertöne höchstens 4,5% betragen.“¹⁾

Zweiter Steinsalzversuch.

Aus den auf bekannte Weise ermittelten Daten

$$A = 28 \text{ mm} \quad 2r = 6,9 \text{ mm} \quad \text{somit } \varphi = 7^\circ 01',$$

und $\delta = 40'$ ergeben sich folgende Werte der Grundwellenlängen für die auf dem sekundären Photogramm (Fig. 6b) sichtbaren Punkte:

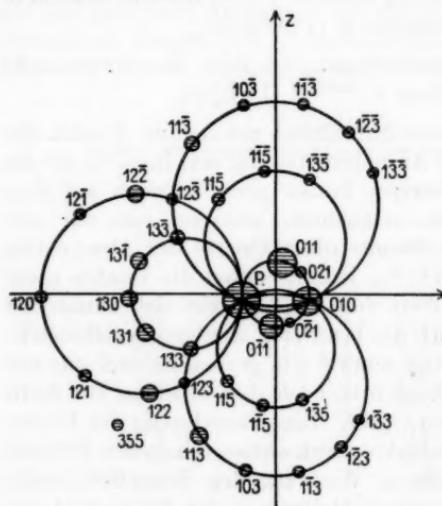


Fig. 6a. Primäres Photogramm.

Tabelle IV.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|--------|---------------------------------|
| A. 122 | 80,7 |
| 113 | 76,1 |
| 113 | 82,1 |
| 355 | 39,1 |
| 115 | 39,2 |
| 185 | 40,3 |
| B. 011 | 66,5 |
| 011 | 55,5 |
| 010 | 122,0 |

Aus der Aufstellung des primären Kristalls ($\neq \varphi = 9^\circ 03'$) berechnet sich die ausgesandte Wellenlänge zu

$$\lambda_0 = 157 \cdot 2a \cdot 10^{-3} \text{ (Grundton)} \quad \text{für } n = 1.$$

$$\frac{\lambda_0}{2} = 78,5 \cdot 2a \cdot 10^{-3} \text{ (1. Oberton)} \quad \text{für } n = 2.$$

1) Die Punkte 010, 011 usw. sind auf den Photogrammen dem Primärpunkt am nächsten gelegen. Das durch einen konstanten Divergenzwinkel $d\varphi$ der einfallenden Strahlen bedingte Wellenlängenintervall $d\lambda/\lambda = \operatorname{ctg} \varphi \cdot d\varphi$ ist bei ihnen daher relativ am größten; insofern ist die Grenze der Klassen A und B wesentlich abhängig von der Orientierung des Kristalls. Die Wahl von 5 als Grenze ist bis zu einem gewissen Grad willkürlich, da der Übergang von A nach B natürlichweise ein kontinuierlicher ist.

$$\frac{\lambda_0}{3} = 52,3 \cdot 2a \cdot 10^{-3} \text{ (2. Oberton) für } n = 3.$$

$$\frac{\lambda_0}{4} = 39,25 \cdot 2a \cdot 10^{-3} \text{ (3. Oberton) für } n = 4.$$

In Tabelle IV finden sich Vertreter für den 1. Oberton (78,5) und den 3. Oberton (39,25), während der äußerst schwache Punkt 010 zweifellos durch den Grundton erzeugt worden ist.

Als Gegenstück folgt Tabelle V, welche die übrigen auf der primären Aufnahme (Fig. 6a) sichtbaren Punkte mit ihren Grundwellenlängen enthält:

Tabelle V.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|-------|---------------------------------|
| 021 | 51,0 |
| 021 | 46,6 |
| 130 | 62,6 |
| 131 | 55,9 |
| 131 | 57,9 |
| 133 | 31,2 |
| 133 | 34,6 |
| 120 | 149,0 |
| 121 | 123,0 |
| 121 | 126,0 |
| 122 | 85,5 |
| 123 | 51,1 |
| 123 | 55,7 |
| 103 | 95,9 |
| 103 | 102,0 |
| 113 | 98,2 |
| 113 | 104,0 |
| 123 | 86,0 |
| 123 | 90,6 |
| 133 | 69,7 |
| 133 | 73,2 |
| 115 | 43,3 |
| 135 | 37,2 |
| 115 | 30,2 |
| 115 | 34,2 |

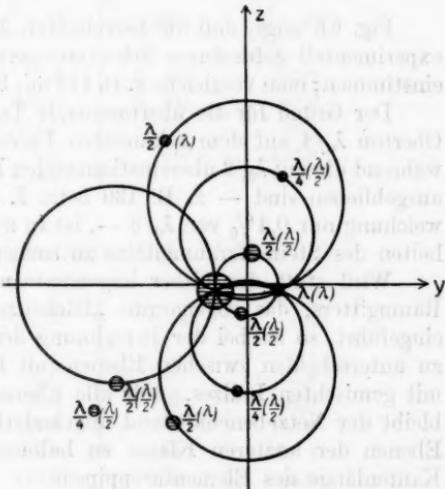


Fig. 6 b. Sekundäres Photogramm.

Von diesen Punkten zeigen folgende die geringste Abweichung von den charakteristischen Werten λ_0 , $\lambda_0/2$ usw.:

120 4,7 % von λ_0
133 6,8 % von $\lambda_0/2$

123 2,8 % von $\lambda_0/8$
155 5,1 % von $\lambda_0/4$.

Dieses Ergebnis steht mit dem oben aufgestellten Erfahrungssatz über den Divergenzeinfluß durchaus im Einklang. Da der zweite Oberton sicher viel schwächer ist als der erste, so erscheint das Ausbleiben von Punkt 123 mit 2,8% Abweichung von $\lambda_0/8$ wohl begreiflich. Dann ist jedoch zu er-

warten, daß alle auf dem sekundären Photogramm erschienenen Vertreter des dritten Obertons eine noch geringere Abweichung als $2,3\%$ aufweisen; Tabelle VI lehrt jedoch, daß dies nicht der Fall ist.

Tabelle VI.

| Index | Abweichung | Index | Abweichung |
|-------|------------------------|-------|------------------------|
| 122 | 2,8% von $\lambda_0/2$ | 355 | 0,2% von $\lambda_0/4$ |
| 113 | 3,0% „ „ „ | 115 | 0,1% „ „ „ |
| 113 | 4,5% „ „ „ | 135 | 2,8% „ „ „ |

Fig. 6 b zeigt, daß die berechneten Abweichungen mit den experimentell gefundenen Schwärzungsverhältnissen gut übereinstimmen; man vergleiche z. B. 113 mit 3% und 113 mit 4,5%.

Der Grund für die überraschende Tatsache, daß der dritte Oberton $\lambda_0/4$ auf dem sekundären Photogramm vertreten ist, während die mit $\lambda_0/3$ übereinstimmenden Punkte (s. Anm. p. 400) ausgeblieben sind — z. B. 180 beim I. Steinsalzversuch, Abweichung nur 0,4% von $\lambda_0/3$ —, ist in strukturellen Besonderheiten des Steinsalzraumgitters zu suchen.

Wird statt des bisher angenommenen einfach kubischen Raumgitters, das sogenannte „flächenzentrierte“ Raumgitter eingeführt, so ist bei der Berechnung der Netzebenenabstände zu unterscheiden zwischen Ebenen mit lauter ungeraden oder mit gemischten Indizes. Für alle Ebenen der ersten Klasse bleibt der Netzebenenabstand ungeändert, während er bei den Ebenen der letzteren Klasse zu halbieren ist. Sei also die Kantenlänge des Elementareppipeds

1. im einfach kubischen Gitter \bar{a}
2. im flächenzentrierten Gitter a'

so ist der Netzebenenabstand der Würffelflächen (a bzw. a')

$$\text{im Fall 1. } a = \bar{a}, \text{ im Fall 2. } a' = \frac{\bar{a}'}{2}.$$

Dann lautet die Beziehung für den Netzebenenabstand d irgend einer Ebene mit gemischten Indizes, wenn p und q zwei beliebige Zahlenfaktoren bedeuten

im Fall 1. $d = p \bar{a} = p a$ und im Fall 2. $d = p \cdot \frac{\bar{a}'}{2} = p \cdot a'$, für eine Netzebene mit gänzlich ungeraden Indizes

im Fall 1. $d = q \bar{a} = q a$ und im Fall 2. $d = q \bar{a}' = 2 q a'$.

Wählen wir, wie es bei der Berechnung der Tabellen geschehen ist, den Würfelebenenabstand (a bzw. a') als Einheit, so haben wir also beim Übergang zum flächenzentrierten Gitter die Netzebenenabstände d aller Ebenen mit gänzlich ungeraden Indizes mit 2 zu multiplizieren. Die in Tabelle IV und V berechneten Wellenlängen sind dann in folgender Weise abzuändern:

Tabelle VII.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|---------------|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|
| A. 122 | 80,7 | A. $1\bar{3}\bar{5}$ | 80,7 |
| 113 | 152,0 | B. 011 | 66,5 |
| 11 $\bar{3}$ | 164,0 | 0 $\bar{1}$ 1 | 55,5 |
| 355 | 78,3 | 010 | 122,0 |
| 1 $\bar{1}$ 5 | 78,4 | | |

Tabelle VIII.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|---------------|---------------------------------|---------------|---------------------------------|
| 021 | 51,0 | 103 | 95,9 |
| 0 $\bar{2}$ 1 | 46,6 | 10 $\bar{3}$ | 102,0 |
| 130 | 62,6 | 113 | 196,0 |
| 131 | 112,0 | 11 $\bar{3}$ | 208,0 |
| 13 $\bar{1}$ | 116,0 | 1 $\bar{2}$ 3 | 86,0 |
| 133 | 62,5 | 1 $\bar{2}$ 3 | 90,6 |
| 13 $\bar{3}$ | 69,3 | 1 $\bar{3}$ 3 | 139,0 |
| 120 | 149,0 | 1 $\bar{3}$ 3 | 146,0 |
| 121 | 123,0 | 115 | 86,6 |
| 12 $\bar{1}$ | 126,0 | 1 $\bar{3}$ 5 | 74,5 |
| 12 $\bar{2}$ | 85,5 | 115 | 60,4 |
| 123 | 51,1 | 11 $\bar{5}$ | 68,4 |
| 12 $\bar{5}$ | 55,7 | | |

Wie aus der Tabelle VII ersichtlich ist, bewirkt die Flächenzentrierung, daß die Wellenlängen der Punkte 355, 1 $\bar{1}$ 5, 1 $\bar{3}\bar{5}$ nicht mehr mit $\lambda_0/4$, sondern mit dem ersten Oberton $\lambda_0/2$ übereinstimmen. Der scheinbare Widerspruch, der darin lag, daß die mit dem zweiten Oberton $\lambda_0/3$ übereinstimmenden

Punkte¹⁾ nicht erschienen sind, während die nächsthöhere Ordnung der Reflexion durch drei Punkte vertreten war, ist damit beseitigt; das Versuchsergebnis verlangt also die Annahme eines flächenzentrierten Raumgitters für die Struktur des Steinsalzkristalls.

Eine Berechnung des I. Steinsalzversuches unter Annahme eines flächenzentrierten Raumgitters bietet prinzipiell nichts Neues.

Zusammenfassung.

Die unter Benützung eines Interferenzstrahls als Strahlungsquelle aufgenommenen „sekundären“ Photogramme enthalten nur eine Auswahl der auf dem primären Photogramm sichtbaren Interferenzpunkte. Es wird durch Berechnung quantitativ genau nachgewiesen, daß nur diejenigen Punkte erschienen sind, die mit der ausgesandten Wellenlänge bzw. deren ersten Oberton übereinstimmen. Damit ist der experimentelle Beweis geliefert, daß die in einem Kristallraumgitter abgebeugte Röntgenstrahlung eine *monochromatische* Strahlung ist — monochromatisch in dem Sinn verstanden, daß außer einer Grundwellenlänge noch deren Obertöne darin vorkommen. Im Gegensatz hierzu kann das von der Röntgenröhre emittierte Strahlengemisch als *weißes* Röntgenlicht bezeichnet werden. Außerdem haben die Versuche gezeigt, daß zwischen Grundton und erstem Oberton keine erheblichen Intensitätsunterschiede bestehen, daß dagegen der Intensitätsabfall zum zweiten Oberton ganz bedeutend sein muß. Eine Erklärung für diese Erscheinung wird in § 7 gegeben werden.

Damit war die Möglichkeit gegeben, Röntgenstrahlen von einer bestimmten Wellenlänge in genügender Intensität zu erzeugen, um auf photographischem Weg die Struktur der Kristalle zu erforschen. Dieses Verfahren liefert eine direkte Vergleichung der Gitterkonstanten zweier Kristalle; hierzu ist es nur nötig, die von einem Kristall I ausgesandte Strahlung auf einen anders beschaffenen Kristall II zu leiten und dann das so entstandene Photogramm zu berechnen. Anwendungen dieser Methode auf die Bestimmung der Raumgitter von Sylvan, Bromkalium und Flußpat sind im zweiten Teil dieser Arbeit enthalten.

1) Bei dieser Vergleichung handelt es sich nur um Punkte der Abt. A. In Abt. B ist $\lambda_0/3$ vertreten durch $0\bar{1}1$ (vgl. Tab. VII).

II. Teil.

§ 4. Struktur des Sylvinraumgitters.

Photographische Einstellung der Kristalle. Bei den folgenden Versuchen ergab sich die Notwendigkeit, auch die hinteren Kristalle K_2 und K_2' (Fig. 2) möglichst genau einstellen zu können; die Genauigkeit der bisher angewandten optischen Methode erwies sich nicht als ausreichend, insofern als der auf Grund des Photogramms berechnete Reflexionswinkel sich meist von dem optisch eingestellten Winkelwert um einen geringen Betrag unterschied, eine Tatsache, die auf die starke Abhängigkeit der optischen Reflexion von der lokalen Oberflächenbeschaffenheit der Kristalle zurückzuführen ist. Um auch die Einstellung der hinteren Kristalle durch Aufnahmen mit Röntgenstrahlen prüfen zu können, wurde in folgender Weise eine Vorrichtung geschaffen, die es gestattete, den Primärstrahl P genau in die Richtung zu leiten, in welcher später der ausgeblendete Interferenzstrahl R verlief. Um den Gang der Strahlen R und R' jederzeit optisch darstellen zu können, wurden in etwa 15 cm Entfernung von K_2 bzw. K_2' zwei Messingtafeln aufgestellt und an den (photographisch ermittelten) Auftreffstellen der Strahlen R und R' zwei kleine Öffnungen O_3 und O_3' eingebohrt. Hierauf wurde ein Glasplättchen mit aufgekleitetem Bleidrahtkreuz an dem Träger T bei E so befestigt, daß ein in Richtung OO_3 verlaufender Lichtstrahl genau durch die Kreuzmitte ging, so daß hierdurch die Richtung des Interferenzstrahles R durch zwei mit dem Kristalltisch fest verbundene Punkte (O und E) definiert war. Hierauf wurde der Kristalltisch aus seinen an der Marmorplatte festgekitteten Unterlagsscheiben emporgehoben und auf neuen Unterlagsscheiben so lange gedreht und verschoben, bis auf einem hinter E befindlichen Fluoreszenzschirm der helle Kreis des durch O gehenden Primärstrahls von dem Schatten des Bleifadenkreuzes in der Mitte durchzogen war. Die Prüfung auf gleiche Helligkeit, d. h. der Nachweis, daß von den Blenden O der zentrale Teil des Primärstrahls ausgeblendet wurde, ließ sich mit dem Fluoreszenzschirm nicht ausführen, da auf demselben derartig geringe Helligkeitsunterschiede nicht mehr mit dem Auge erkannt werden konnten. Es wurde daher auf einer hinter E aufgestellten Platte das Bleifadenkreuz durch den die

Blende O passierenden Primärstrahl photographiert und nachgesehen, ob der Kreis auf der Platte homogen geschwärzt war. Hierauf wurden die Unterlagsscheiben in der neuen Lage festgekittet; ganz analog vollzog sich die Einstellung für die Richtung $O'R'$. Der Kristalltisch konnte also jederzeit in drei Stellungen gebracht werden, nämlich außer der in Fig. 2 gezeichneten „Normalstellung“ noch in die beiden „Hilfsstellungen“, in denen der Primärstrahl in der Richtung R bzw. R' verläuft. Auf diese Weise konnten die Kristalle K_1 und K_2 mit einem großen Grad von Genauigkeit eingestellt werden, indem die Winkel jedesmal aus der mit dem Primärstrahl in der „Hilfsstellung“ erhaltenen Aufnahme berechnet wurden.

Bestimmung der ausgesandten Wellenlänge. Da sich die theoretisch zu erwartenden Werte der Gitterkonstanten der zu vergleichenden Kristalle $NaCl$ und KCl nur wenig von einander unterscheiden, war es von größter Wichtigkeit, die von dem vorderen Kristall (K_1) ausgesandte Wellenlänge möglichst genau zu bestimmen. Nach der Formel $n\lambda = 2d \sin \varphi$ ist der Fehler bei der Wellenlängenbestimmung proportional mit dem bei der Winkelbestimmung gemachten Fehler. Der Winkel φ (= Winkel zwischen Strahl und Ebene) unter dem der Primärstrahl an der Würfelfläche von K_1 reflektiert wurde, ließ sich aus der Beziehung $\operatorname{tg} \varphi = r/A$ um so genauer berechnen, je größer der Radius r des Hauptkreises war. Deshalb wurden die photographischen Platten etwa in einem Abstand $A = 80$ mm von dem Kristall entfernt aufgestellt. Da die Platten zweimal in schwarzes Papier eingewickelt waren, konnte der Plattenabstand A nur mit einer Genauigkeit von etwa 1 bis 2 mm gemessen werden. Die Genauigkeit dieses gemessenen Wertes ließ sich jedoch mit Hilfe einer kleinen Konstruktion noch etwas verbessern. Nach der oben besprochenen graphischen Methode wurde unter Benützung dieses Wertes A der Ort der auf einer Geraden liegenden Punkte 230, 120, P , 010 (siehe Fig. 7a) konstruiert. Konnten beim Auflegen der photographischen Schicht auf die Zeichnung die Schwärzungsflecken mit diesen Punkten nicht zur Deckung gebracht werden, so wurde für einen um 1 mm verschiedenen Wert von A die Konstruktion wiederholt. Auf diese Weise konnte der Plattenabstand A bis auf weniger als 0,5 mm, d. h. auf etwa $1/2\%$ genau bestimmt werden. Der Meßfehler bei der Bestimmung des Durchmessers

$2r$ des Hauptkreises auf dem Photogramm beträgt höchstens 0,2 mm, d. h. also etwa 1%, da bei der gewählten Orientierung $2r = 21,6$ mm war. Falls beide Fehler in demselben Sinne wirken, so ergibt sich aus $\tan \varphi = r/A$ im ungünstigsten Fall eine um 1,5 Proz. falsche Bestimmung von $\sin \varphi$; der durchschnittliche Fehler bei der Bestimmung der ausgesandten Wellenlänge ist daher von der Größenordnung von 1%.

Die für die folgenden Versuche erforderliche „monochromatische“ Strahlung wurde geliefert durch die Reflexion des Primärstrahls an der Würfelfläche von Steinsalz ($NaCl$) bzw. Sylvin (KCl). Die Reflexionswinkel (= Winkel zwischen Strahl und Ebene) betragen: bei Steinsalz: $\varphi = 7^\circ 56'$, bei Sylvin: $\varphi = 7^\circ 28'$. Werden die Netzebenenabstände der Würfelfläche bei Steinsalz mit a , bei Sylvin mit a' bezeichnet, so ergeben sich die ausgesandten Wellenlängen aus folgenden Beziehungen:

1. Steinsalz:

$$n\lambda = 2a \sin 7^\circ 56' = 0,188 \cdot 2a$$

Grundwellenlänge für $n = 1$

$$\lambda_0 = 0,188 \cdot 2a$$

2. Sylvin:

$$n\lambda = 2a' \sin 7^\circ 28' = 0,180 \cdot 2a'$$

Grundwellenlänge für $n = 1$

$$\lambda_0 = 0,180 \cdot 2a'$$

Während bei den oben besprochenen Versuchen mit Steinsalz die Kristalle so aufgestellt worden waren, daß *einige* Punkte (z. B. 011, 010, 011) möglichst *große* Intensität besaßen, erschien es jetzt nützlicher, den Kristallen eine solche Orientierung zu geben, daß möglichst *viele* Punkte eine *gleichmäßige mittlere* Schwärzung zeigten; denn bei einer Auswertung der Photogramme zum Zweck der Erforschung der Kristallstruktur mußte hauptsächlich darauf Wert gelegt werden, daß die Reflexionswirkung von möglichst vielen verschiedenenartigen Netzebenen auf dem Photogramm zur Geltung kam. Als sehr günstig erwies sich eine solche Orientierung der hinteren Kristalle, daß der Winkel, unter dem ihre Würfelfläche von dem Interferenzstrahl getroffen wurde, etwa doppelt so groß war wie der Winkel, unter dem der Primärstrahl auf die Würfelfläche des vorderen Kristalls auftraf.

Erster Sylvinversuch.

Der Zweck dieses Versuches war, das Verhältnis der Gitterkonstanten von Sylvin und Kochsalz direkt experimentell zu bestimmen. Bei K_1 (Fig. 2) befand sich ein Steinsalzspaltstück in der auf p. 403 angegebenen Orientierung. Unter Benützung des aus Molekulargewicht und Dichte erhaltenen theoretischen Wertes des Gitterkonstantenverhältnisses wurde berechnet, wie der bei K_2 befindliche Sylvinkristall aufzustellen war, damit die seinem Würfelpunkt 010 zukommende Grundwellenlänge

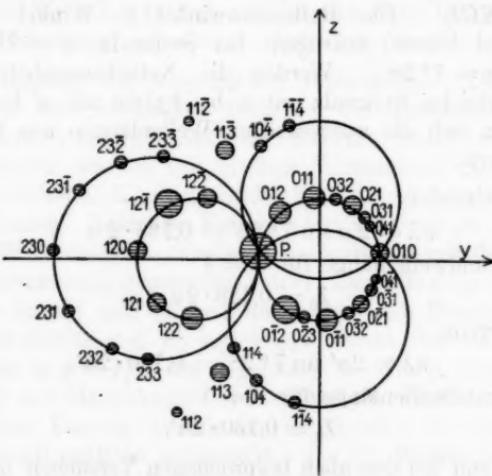


Fig. 7a. „Weißes“ Photogramm.

gleich der doppelten einfallenden Wellenlänge wird; es ergab sich $\varphi = 14^\circ 10'$. Hierauf wurde auf diesen Winkel optisch eingestellt und in der „Hilfsstellung“ des Kristalltisches eine Röntgenaufnahme gemacht. Ergab die Winkelbestimmung aus den Photogrammen einen etwas abweichenden Wert, so wurde dementsprechend mittels der optischen Einstellung korrigiert und wieder mit Röntgenstrahlen geprüft. Dann wurde noch eine kleine „Neigung“ $\delta = 1^\circ 20'$ hinzugefügt, um den zur Y-Achse symmetrisch gelegenen Punkten kleine Wellenlängendifferenzen zu erteilen und dadurch die Mannigfaltigkeit der vorkommenden Wellenlngengemische zu verdoppeln. Zum Schluß wurde noch einmal eine Aufnahme in der „Hilfsstellung“ des

Kristalltisches, also unter Benutzung des Primärstrahls, gemacht, wobei sich die photographische Platte genau an der Stelle befand, an der später die Platten zur monochromatischen Aufnahme angebracht waren. Dadurch wurde ermöglicht, daß dieses mit „weißem“ Röntgenlicht erhaltene Photogramm, das wir fernerhin kurz als „weißes“ Photogramm bezeichnen wollen, mit dem monochromatischen Photogramm direkt zur Deckung gebracht werden konnte, so daß die Identifizierung der einzelnen Punkte auf letzterem äußerst einfach war.

Zum Unterschied gegen die früheren Versuche mit Steinsalz möge noch einmal hervorgehoben werden, daß die genaue Orientierung des Kristalls K_2 nicht mehr nachträglich aus dem monochromatischen Photogramm berechnet wurde, sondern daß jetzt diese Daten aus besonderen, unter Benützung des Primärstrahls erhaltenen Einstellungsaufnahmen gewonnen wurden. Durch dieses neue Verfahren wurde eine erheblich größere Genauigkeit in der Bestimmung von φ und δ erzielt, da bei den Einstellungsaufnahmen die Platten ziemlich weit (etwa 60 mm) entfernt aufgestellt werden konnten, während bei den monochromatischen Aufnahmen aus Intensitätsgründen der Plattenabstand möglichst klein gewählt werden mußte.

Resultat.

Nach einer Expositionszeit von 19 Stunden wurden die photographischen Platten entwickelt. Die auf ihnen erschienenen Punkte sind in Fig. 7 b aufgezeichnet, in welcher wieder durch die verschiedenen großen Kreise die Schwärzungsverhältnisse der Punkte dargestellt werden sollen. Die den einzelnen Punkten zukommenden Grundwellenlängen sind in folgender Tabelle zusammengestellt (a' ist der Würfelebenenabstand von Sylvin).

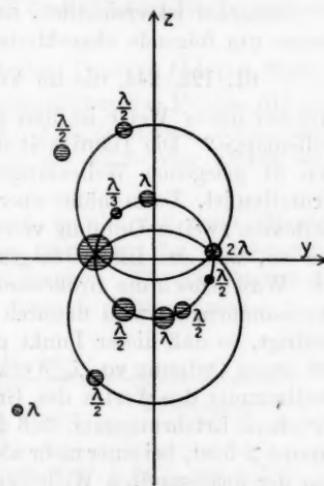


Tabelle XI.

| Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ |
|--------|----------------------------------|--------|----------------------------------|
| A. 104 | 62,2 | B. 012 | 57,8 |
| 114 | 62,6 | 011 | 133,0 |
| 112 | 128,0 | 010 | 245,0 |
| 032 | 59,9 | 012 | 40,2 |
| 113 | 59,9 | 011 | 111,0 |
| 041 | 58,9 | | |

Zunächst ist ersichtlich, daß sich die Wellenlängen gruppieren um folgende charakteristische Werte

61, 122, 244, die im Verhältnis 1:2:4 stehen.

Welcher dieser Werte ist nun gleich der ausgesandten Grundwellenlänge? Die Häufigkeit des Auftretens der in der Nähe von 61 gelegenen Wellenlängen läßt vermuten, daß 61 der Grundton ist. Dann müßte aber der Punkt 012 mit 40,2 als eine Reflexion zweiter Ordnung von $\lambda_0/3$ (zweiter Oberton) gedeutet werden, was aus Intensitätsgründen äußerst unwahrscheinlich ist. Wird jedoch die Größenordnung des Grundtons gleich 122 angenommen, so wird dadurch die Ordnungszahl von 012 erniedrigt, so daß dieser Punkt nunmehr zwangsläufig als Vertreter der ersten Ordnung von $\lambda_0/3$ erklärt werden kann. Zur genauen Bestimmung des Wertes des Grundtons dient der oben ausgesprochene Erfahrungssatz, daß die Punkte, deren Indexquadratsumme > 5 ist, bei einer mehr als 4,5% betragenden Abweichung von der ausgesandten Wellenlänge (bzw. deren Obertöne), auf dem monochromatischen Photogramm nicht mehr sichtbar werden. Wir berechnen daher die Wellenlängen der übrigen auf der „weißen Aufnahme“ sichtbaren Punkte und sehen nach, welche von ihnen diesen charakteristischen Werten sich am meisten nähern.

Tabelle XII.

| Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ |
|-------|----------------------------------|-------|----------------------------------|-------|----------------------------------|-------|----------------------------------|
| 120 | 96,0 | 231 | 87,6 | 032 | 53,2 | 023 | 42,8 |
| 121 | 83,7 | 231 | 84,5 | 021 | 93,6 | 114 | 45,2 |
| 121 | 76,3 | 232 | 73,5 | 021 | 102,0 | 113 | 71,9 |
| 122 | 58,2 | 232 | 68,3 | 031 | 71,3 | 114 | 72,4 |
| 122 | 48,4 | 233 | 57,8 | 031 | 75,7 | 112 | 113,0 |
| 230 | 92,7 | 233 | 51,8 | 041 | 56,4 | 104 | 51,9 |

Da der Punkt 122 mit $\lambda = 58,2$ auf dem sekundären Bild nicht mehr sichtbar ist, muß seine Abweichung von dem zu bestimmenden Wert des ersten Obertons $\lambda_0/2$ mindestens $4,5\%$ betragen ($= 2,7$). Demnach kann der gesuchte Wert nicht unter 61,0 liegen. Aus der Sichtbarkeit des Punktes 041 (Fig. 7b) läßt sich leicht eine obere Schranke für den fraglichen Wert von $\lambda_0/2$ ableiten, nämlich $58,9 + 2,7 = 61,6$. Der genaue Wert des ersten Obertons liegt also in dem Intervall 61,0 bis 61,6; zwei Umstände weisen jedoch darauf hin, daß er näher an der oberen Grenze dieses Intervalls liegen muß, nämlich:

1. die erhebliche Intensität des Punktes $1\bar{1}4$ mit 62,6;
2. eine Vergleichung der Intensitäten der Punkte 011 und $0\bar{1}1$; $0\bar{1}1$ mit 183,5 muß dem Grundton etwas näher liegen als 011 mit 111,5; die Mitte von beiden wäre $122,5 = 2 \times 61,25$.

Auf Grund dieser Überlegungen wurde der erste Oberton $\lambda_0/2 = 61,5 \cdot 2a' \cdot 10^{-3}$, also der Grundton der ausgesandten Wellenlänge $\lambda_0 = 123 \cdot 2a' \cdot 10^{-3}$ gesetzt. Für die Punkte der Tabelle XI ergeben sich dann folgende Divergenzen:

Tabelle XIII.

| Index | Abweichung in % | Index | Abweichung in % |
|--------|-------------------------|--------|-------------------------|
| A. 104 | 1,1 % von $\lambda_0/2$ | B. 012 | 6,0 % von $\lambda_0/2$ |
| 114 | 1,8 % " " | 011 | 8,5 % " λ_0 |
| 112 | 4,2 % " λ_0 | 010 | 0,4 % " $2 \lambda_0$ |
| 032 | 2,6 % " $\lambda_0/2$ | 012 | 2,0 % " $\lambda_0/3$ |
| 113 | 2,6 % " " | 011 | 9,4 % " λ_0 |
| 041 | 4,2 % " " | | |

Bei einer Vergleichung der in Fig. 7b dargestellten Schwärzungen mit den in Tabelle XIII berechneten Abweichungen muß die Übereinstimmung als eine gute bezeichnet werden. Die schon früher besprochene Ausnahmestellung der Punkte $0\bar{1}2$, $0\bar{1}1$ usw. ist auch hier deutlich erkennbar. Die schon früher bei einem Steinsalzversuch¹⁾ beobachtete auffallende Erscheinung, daß der Punkt 010 trotz sehr guter Übereinstimmung mit $2\lambda_0$ im

1) E. Wagner, Phys. Zeitschr. 14. p. 1232. 1913.

Vergleich zum „weißen“ Photogramm nur sehr schwach gekommen ist, während die Wellenlängen zweiter Ordnung in der *einfallenden Strahlung* sich in überraschend starker Intensität auf dem monochromatischen Photogramm geltend gemacht haben, wird in einem späteren Kapitel noch eine eingehendere Behandlung finden.

Gitterkonstantenvergleichung. Die ausgesandte Wellenlänge ist nach p. 408 ausgedrückt im Würfelebenenabstand a von Steinsalz

$$\lambda_0 = 0,138 \cdot 2 a$$

während aus obigen Überlegungen sich folgender in a' (Würflebenenabstand von Sylvin) gemessener Wert für λ_0 ergibt:

$$\lambda_0 = 0,128 \cdot 2 a'.$$

Hieraus berechnet sich das Verhältnis der beiden Gitterkonstanten:

$$a : a' = 0,128 : 0,138 = 1 : 1,122.$$

Wie genau ist nun die Bestimmung dieses Verhältnisses? Da auf der monochromatischen Aufnahme ziemlich viele Punkte erschienen sind, war es möglich, den in a' ausgedrückten Wert von λ_0 in das Intervall 61,0 bis 61,6 einzuschließen; dieser Spielraum würde einem möglichen Fehler von etwa 1% von λ_0 entsprechen. Jedoch konnte aus verschiedenen, oben diskutierten Umständen geschlossen werden, daß der gesuchte Wert eher an der oberen Grenze des Intervalls sich befinden müsse; somit kommt für die Fehlerberechnung nur die Hälfte des Intervalls, also ein Fehler von etwa 0,5% in Betracht. Der durchschnittliche Fehler bei der Bestimmung der ausgesandten Wellenlänge (ausgedrückt in a) betrug nach früherem 1%. Im ungünstigsten Fall, wenn beide Fehler im gleichen Sinne wirken, kann die Berechnung des Verhältnisses 1 : 1,122 eine Genauigkeit von 1,5% beanspruchen. Bevor nun dieser experimentell gefundene Wert mit dem theoretisch berechneten verglichen wird, soll zunächst noch ein weiterer Versuch besprochen werden, aus dem wichtige Schlüsse auf den Aufbau des dem Sylvin-Kristall zugrundeliegenden Raumgitters gezogen werden können.

Zweiter Sylvinversuch.

Während auf der „weißen“ Aufnahme von Steinsalz Punkte mit gänzlich ungeraden Indizes, z. B. 113, 133 usw., in großer Anzahl vertreten sind, fehlen sie auf der „weißen“ Aufnahme von Sylvin fast völlig und zwar um so mehr, je höher die betreffenden Indizes sind. Diese Verschiedenheit der primären Photogramme läßt vermuten, daß Sylvingitter und Steinsalzgitter nicht zum gleichen Typus gehören; der experimentelle Beweis für die Annahme eines einfach kubischen Raumgitters für die Sylvinstruktur wird durch folgende monochromatische Aufnahme erbracht:

Ein bei K_1' (Fig. 2) in der auf p. 408 angegebenen Orientierung angebrachtes Sylvinspaltstück lieferte die monochromatische Strahlung, deren Grundwellenlänge zu

$$\lambda_0 \cdot 10^3 = 180 \cdot 2a'$$

bestimmt worden war. Der zweite Kristall K_2' (ebenfalls Sylvin) wurde nun so aufgestellt, daß die dem Punkt 111 (Oktaeder) entsprechende Grundwellenlänge $= 2\lambda_0$ war, im Fall eines flächenzentrierten Raumgitters, und $= \lambda_0$ im Fall eines einfach kubischen Raumgitters.

Hieraus ergeben sich für die Winkel von K_2' folgende Werte:

$$\varphi = 19^\circ 26' \text{ und } \delta = 11^\circ 24'.$$

Man beachte in Fig. 8a und 8b die durch die Neigung verursachte beträchtliche Hebung des Primärpunktes P gegenüber der Y-Achse. — Die Berechnung unter Annahme eines einfach kubischen Raumgitters ergab für die auf dem monochromatischen Photogramm sichtbaren Punkte folgende Wellenlängen:

Tabelle XIV.

| Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ | Abweichung in % |
|--------|----------------------------------|------------------------|
| A. 230 | 65,3 | 0,5% von $\lambda_0/2$ |
| 014 | 63,8 | 1,9% „ $\lambda_0/2$ |
| 212 | 126,0 | 2,7% „ λ_0 |
| 113 | 63,0 | 3,1% „ $\lambda_0/2$ |
| 111 | 134,0 | 3,3% „ λ_0 |
| 041 | 67,3 | 3,5% „ $\lambda_0/2$ |
| 001 | 188,0 | 3,6% „ $3\lambda_0/2$ |
| B. 011 | 72,5 | 11,5% „ $\lambda_0/2$ |

Als Gegenstück folgt Tabelle XV mit den Wellenlängen der übrigen, auf dem „weißen“ Photogramm sichtbaren Punkte.

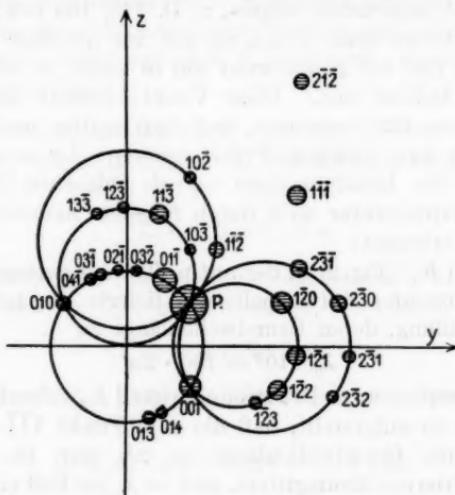


Fig. 8a. „Weißes“ Photogramm.

Tabelle XV.

| Index | $\frac{\lambda}{2 \alpha'} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda}{2 \alpha'} \cdot 10^3$ |
|-------|--|-------|--|
| 013 | 89,7 | 231 | 47,2 |
| 032 | 47,9 | 231 | 74,1 |
| 021 | 95,6 | 232 | 72,0 |
| 031 | 81,1 | 112 | 35,8 |
| 010 | 333,0 | 103 | 36,0 |
| 120 | 51,6 | 123 | 73,3 |
| 121 | 74,3 | 133 | 71,5 |
| 122 | 70,4 | 102 | 110,0 |
| 123 | 58,7 | | |

Als Kriterium zur Entscheidung der Frage nach dem Gittertypus diente die Erfahrungstatsache (siehe p. 407), daß der im Falle des flächenzentrierten Gitters mit $2\lambda_0$ übereinstimmende Punkt $1\bar{1}\bar{1}$ auf dem monochromatischen Photogramm nur sehr schwach sichtbar sein kann. Die relativ große Inten-

sität von $1\bar{1}\bar{1}$ auf Fig. 8b spricht daher gegen die Annahme einer Flächenzentration. Ferner zeigt eine Vergleichung der Schwärzungen von $11\bar{3}$ und $2\bar{3}0$ auf der ersten und letzten photographischen Platte, daß beide Punkte einer gleich stark

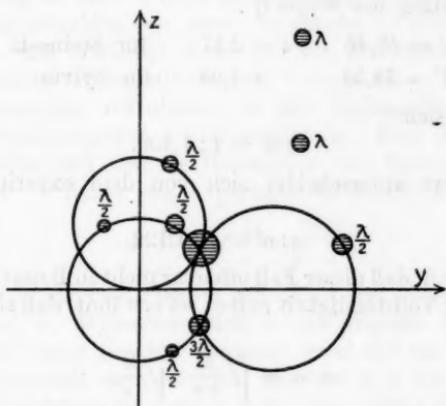


Fig. 8b. „Monochromatisches“ Photogramm.

absorbierbaren Wellenlänge angehören müssen; dies ist nach Tabelle XIV nur dann möglich, wenn der Berechnung die Annahme eines einfach kubischen Raumgitters zugrunde gelegt wird.

Theoretische Berechnung der Gitterkonstanten. Ist s die Dichte, M das Molekulargewicht und m die Masse eines Wasserstoffatoms, so ergibt sich unter der Annahme, daß jeder Gitterpunkt mit einem Atom besetzt ist, folgende Gleichung für den Würfelebenenabstand

$$a = \sqrt[3]{\frac{M \cdot m_H}{2s}} \quad (\text{einfach kubisches Gitter})$$

$$\text{bzw. } a = \sqrt[3]{\frac{M \cdot m_H}{4s}} \quad (\text{flächenzentriertes Gitter}).$$

I. Die früheren Versuchsergebnisse lassen vermuten, daß der Struktur des Steinsalzes ein flächenzentriertes, der des Sylvins ein einfaches kubisches Raumgitter zugrunde gelegt

werden muß. Das Verhältnis der Würfelebenenabstände von $NaCl$ und KCl lautet dann

$$a : a' = \sqrt[3]{\frac{M}{2s}} : \sqrt[3]{\frac{M'}{s'}};$$

nach Einsetzen der Werte¹⁾

$$\begin{array}{lll} M = 58,46 & s = 2,17 & \text{für Steinsalz} \\ M' = 74,56 & s' = 1,98 & \text{für Sylvin} \end{array}$$

berechnet sich

$$a : a' = 1 : 1,409.$$

Dieser Wert unterscheidet sich von dem experimentell gefundenen

$$a : a' = 1 : 1,122$$

so bedeutend, daß dieser Fall offenbar nicht in Betracht kommen kann. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich dasselbe Verhältnis

$$a : a' = \sqrt[3]{\frac{M}{2s}} : \sqrt[3]{\frac{M'}{s'}}$$

ergeben würde, wenn man sich jeden Gitterpunkt mit einem Molekül statt mit einem Atom besetzt denken würde.

II. Die Annahme, daß der Typus beider Raumgitter derselbe ist, also entweder beide einfach kubisch oder beide flächenzentriert, liefert für das Verhältnis $a : a'$ den Wert 1 : 1,118, der mit geradezu überraschender Genauigkeit mit dem experimentell gefundenen Wert 1 : 1,122 übereinstimmt. Die Abweichung beträgt nur 0,4%, während früher der mögliche Versuchsfehler zu 1,5% berechnet wurde. Die Ansicht von der Gleichwertigkeit beider Gittertypen scheint jedoch mit dem Resultat des zweiten Sylvinvorversuches in einem gewissen Widerspruch zu stehen.

III. Um die Versuchsergebnisse erklären zu können, muß eine Hypothese gefunden werden, die für das Verhältnis der Gitterkonstanten den Wert

$$a : a' = \sqrt[3]{\frac{M}{s}} : \sqrt[3]{\frac{M'}{s'}}$$

liefert und die es zugleich gestatten muß, das Steinsalzgitter als flächenzentrierten, das Sylvingitter als einfach kubischen

1) Landolt-Börnstein, Tabellen, 4. Aufl. 1912.

Typus aufzufassen. Diese beiden Bedingungen, auf der einen Seite wegen des Gitterkonstantenverhältnisses zu verlangen, daß beide Raumgitter in gleicher Weise aus ihren Elementarteilchen aufgebaut sein müssen, und auf der anderen Seite zu fordern, daß sie sich in ihrer abbeugenden Wirkung gegenüber den Röntgenstrahlen wie zwei verschiedene Gittertypen verhalten, werden befriedigt durch das von den Herren Bragg¹⁾ vorgeschlagene Raumgittermodell. Nach ihrer Ansicht sind beide Raumgitter aufzufassen als eine ineinanderstellung von zwei flächenzentrierten Atomraumgittern. Dem Aufbau nach unterscheiden sich also die Raumgitter von Sylvian und Steinsalz nicht — daher das experimentell bestätigte Verhältnis

$$a : a' = \sqrt[3]{\frac{M}{s}} : \sqrt[3]{\frac{M'}{s'}},$$

wohl aber in ihrem Verhalten gegenüber den Röntgenstrahlen. Auf Grund der Hypothese, daß die abbeugende Wirkung der Atome mit ihrem Gewicht zunimmt, erscheint es verständlich, daß bei Steinsalz hauptsächlich das aus den schwereren *Cl*-Atomen bestehende flächenzentrierte Raumgitter für die Interferenz der Röntgenstrahlen in Betracht kommt. Bei Sylvian dagegen, der aus zwei annähernd gleich schweren Atomen besteht, sind die beiden Atomraumgitter gleichermaßen wirksam, so daß sich der Typus eines einfach kubischen Raumgitters ergibt.

§ 5. Struktur des Bromkaliumraumgitters.

Nach Erledigung der Versuche mit Sylvian (Chlorkalium) wurde die Struktur des mit ihm isomorphen Bromkaliums untersucht. Infolge des hohen Atomgewichts von Brom (etwa 80) wurden die Interferenzstrahlen im Kristall selbst durch Absorption stark geschwächt, so daß eine drei- bis viermal so lange Expositionszeit erforderlich war, wie bei einem Steinsalzkristall von gleicher Dicke (etwa 1 mm). Die Anwendung in Form eines Dünnschliffs (Dicke etwa 0,1 mm) ermöglichte jedoch eine bedeutende Herabsetzung der Expositionszeit; nicht bloß die absolute Intensität der einzelnen Interferenzpunkte wurde dadurch bedeutend gesteigert, sondern es war auch eine Verschiebung der relativen Intensitäten nach der Seite der längeren

1) Proc. of the Roy. Soc. 89. p. 248. 1913.

Annalen der Physik. IV. Folge. 47.

Wellenlängen hin deutlich zu erkennen. Als strahlender Kristall diente Steinsalz ($\varphi = 7^\circ 56'$), während die Winkelwerte des Bromkaliums $\varphi = 13^\circ 46'$ und $\delta = 1^\circ 20'$ lauteten.

Nach 23stündiger Exposition konnten auf den photographischen Platten die in Fig. 9 b eingetragenen Punkte identifiziert werden. Folgende Überlegungen führten zur Annahme eines flächenzentrierten Raumgitters:

1. Im Fall des einfach kubischen Raumgitters müßte $1\bar{1}\bar{5}$ als Vertreter des dritten Obertons ($\lambda_0/4$) aufgefaßt werden, während $0\bar{1}2$ (zweiter Oberton) trotz geringerer Abweichung nicht erschienen ist.

2. Eine Vergleichung der Schwärzungen der Punkte 118 und 032 auf der ersten und letzten Platte ergibt, daß 118 einer stärker absorbierbaren Wellenlänge angehören muß als 032, während das einfach kubische Gitter Gleichheit der Wellenlänge ergeben würde.

In Tabelle XVI sind die auf dem sekundären Bild sichtbaren Punkte zusammengestellt ($a' = \text{Würfelebenenabstand}$).

Tabelle XVI.

| Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ | Abweichung in % | Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ | Abweichung in % |
|----------------------|----------------------------------|------------------------|-------------|----------------------------------|------------------------|
| A. $1\bar{2}\bar{2}$ | 60,0 | 0,0% von $\lambda_0/2$ | B. 012 | 56,6 | 5,6% von $\lambda_0/2$ |
| $1\bar{1}3$ | 121,0 | 0,8% „ λ_0 | 010 | 238,0 | 0,8% „ $2\lambda_0$ |
| 032 | 58,4 | 2,7% „ $\lambda_0/2$ | 011 | 130,0 | 8,5% „ λ_0 |
| $1\bar{1}4$ | 62,2 | 3,6% „ „ | $0\bar{1}1$ | 108,0 | 10,0% „ „ |
| $10\bar{4}$ | 62,4 | 4,0% „ „ | | | |
| $1\bar{1}5$ | 62,6 | 4,3% „ „ | | | |

Die Aufgabe, die Grundwellenlänge λ_0 in a' auszudrücken, wird diesmal dadurch sehr erleichtert, daß Punkt $1\bar{2}\bar{2}$ auf dem monochromatischen Photogramm außerordentlich stark geschwärzt ist. Seine Wellenlänge muß also mit einem der charakteristischen Werte genau übereinstimmen; von diesen kann aus Intensitätsgründen nur Grundton oder erster Oberton in Betracht kommen. Die Wahl von 60,0 als Grundton würde jedoch bedingen, daß 010 mit 238,0 als eine Reflexion vierter Ordnung gedeutet werden müßte; deshalb ist die Grundwellenlänge $\lambda_0 = 120 \cdot 2a' \cdot 10^{-3}$ gesetzt worden.

Tabelle XVII beweist, daß alle übrigen auf der „weißen“ Aufnahme sichtbaren Punkte solche große Abweichungen von λ_0 bzw. $\lambda_0/2$ aufweisen, daß sie auf dem monochromatischen Photogramm nicht mehr sichtbar sein können.

Tabelle XVII.

| Index | $\frac{\lambda}{2a'} \cdot 10^3$ |
|-------|----------------------------------|
| 012 | 38,6 |
| 032 | 51,5 |
| 021 | 90,7 |
| 021 | 99,7 |
| 031 | 69,2 |
| 031 | 73,7 |
| 041 | 54,7 |
| 041 | 57,3 |
| 120 | 99,0 |
| 121 | 78,8 |
| 121 | 86,2 |
| 122 | 50,0 |
| 232 | 69,6 |
| 131 | 42,6 |
| 131 | 50,8 |
| 115 | 46,0 |
| 104 | 51,8 |
| 103 | 90,4 |
| 115 | 81,2 |
| 114 | 45,7 |
| 113 | 145,0 |
| 114 | 72,2 |

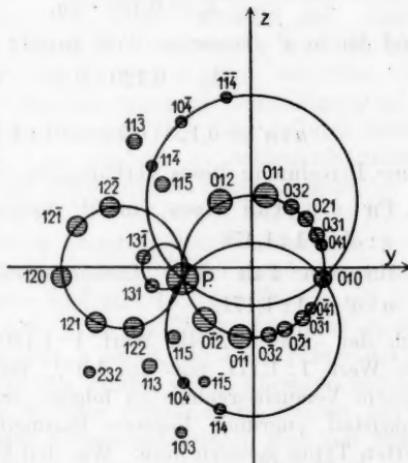
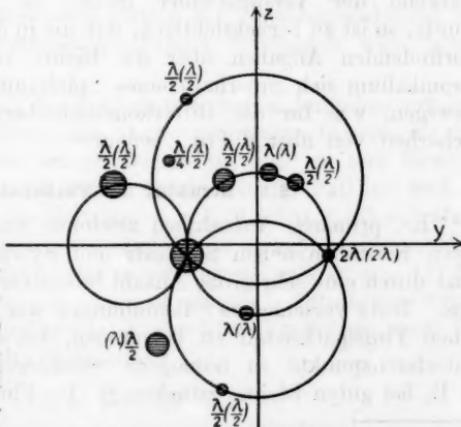


Fig. 9 a. „Weißes“ Photogramm.



Anm.: Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf das flächenzentrierte Gitter.

Fig. 9 b. „Monochromatisches“ Photogramm.

ebenenabstand der Würfelflächen von Steinsalz bzw. Bromkalium), können wir wieder das Verhältnis dieser Größen berechnen. Aus der Orientierung des strahlenden Steinsalzkristalls ($\varphi = 7^{\circ} 56'$) ergibt sich

$$\lambda_0 = 0,138 \cdot 2a,$$

während der in a' gemessene Wert lautet:

$$\lambda_0 = 0,120 \cdot 2a',$$

somit

$$a : a' = 0,120 : 0,138 = 1 : 1,150.$$

Eine Berechnung dieses Verhältnisses ergibt

1. für den Fall eines einfach kubischen BrK -Gitters
 $a : a' = 1 : 1,476$;

2. für den Fall eines flächenzentrierten BrK -Gitters
 $a : a' = 1 : 1,171$.

Da sich der experimentelle Wert $1 : 1,150$ von dem theoretischen Wert $1 : 1,171$ nur um $1,8\%$ unterscheidet, so ist aus diesem Versuchsergebnis zu folgern, daß das dem Bromkaliumkristall zugrunde liegende Raumgitter zum flächenzentrierten Typus gehören muß. Was den Umstand anbelangt, daß die Abweichung vom theoretischen Wert $1,8\%$ beträgt, während der Versuchsfehler früher zu $1,5\%$ angegeben wurde, so ist zu berücksichtigen, daß die in der Literatur¹⁾ sich vorfindenden Angaben über die Dichte von kristallisiertem Bromkalium sich innerhalb eines Spielraums von etwa 12% bewegen, was für die Gitterkonstantenberechnung eine Unsicherheit von über 2 Proz. bedeutet.

§ 6. Struktur des Flußspats.

Bei primären Aufnahmen zeichnete sich unter den regulären Kristallen neben Steinsalz und Sylvan vor allem Flußpat durch eine sehr große Anzahl intensiver Interferenzpunkte aus. Trotz verschiedener Bemühungen war es nicht gelungen, einen Flußpatkristall zu bekommen, bei dem die einzelnen Interferenzpunkte so homogene Schwärzungen zeigten, wie z. B. bei guten Steinsalzstücken.²⁾ Da Flußpat oktaedrische

1) Landolt-Börnstein, Tabellen, 4. Aufl. 1912.

2) Vgl. Photogramm Nr. 2 (Tafel IV) Flußpat mit Nr. 3 (Tafel V), Steinsalz.

Spaltbarkeit besitzt, wurde zu den Aufnahmen eine parallel zu einer Würfelfläche geschliffene, vollständig klar durchsichtige Platte von 1 mm Dicke verwandt.

Zur Identifikation der einzelnen Interferenzpunkte mußte dieses Mal an Stelle der sonst ausreichenden Bestimmung durch Kreise die genaue Konstruktion¹⁾ der Schnittpunkte der Zonenkegel mit der Y- und Z-Achse ausgeführt werden. Das Auffinden der zu den einzelnen Zonenellipsen gehörigen Indizes wurde bei den früheren Kristallen dadurch erleichtert, daß der Reihe nach die einfachsten Zahlenverhältnisse auftraten, während bei Flußpat in dieser Zahlenfolge einige Lücken zu bemerken sind; z. B. ist bei den in der XZ-Ebene liegenden Zonenachsen zwischen den Verhältnissen 1:5 und 1:7 der Wert 1:6 ausgefallen. Wie Fig. 10a zeigt, kommen auf den Zonenkreisen 1:5 und 1:7 nur Punkte mit gänzlich ungeraden Indizes vor. Wird der Flußpatstruktur ein flächenzentriertes Gitter zugrunde gelegt, so ist das Fehlen des Zonenkreises 1:6, welcher nur Punkte mit gemischten Indizes enthalten kann, ohne weiteres verständlich: Punkte mit hohen Indizes, also kleinem Netzebenenabstand, sind mit Rücksicht auf die Energieverteilung im „weißen“ Spektrum nur dann vertreten, wenn ihre Indizes lauter ungerade Zahlen sind, so daß durch die Flächenzentrierung der Netzebenenabstand im Vergleich zum Würfelebenenabstand verdoppelt wird (siehe Steinsalzversuche).

Die Berechnung der monochromatischen Aufnahme erfolgte daher unter Annahme eines flächenzentrierten Gitters, für das sich auf Grund des sekundären Bildes noch weitere Beweise erbringen lassen; z. B. müßte Punkt 115 im Fall des einfach kubischen Gitters als Vertreter von $\lambda_0/6$ (statt $\lambda_0/3$) aufgefaßt werden, was aus Intensitätsgründen sehr unwahrscheinlich wäre. — Die Flußpatplatte war so orientiert, daß $\varphi = 17^\circ 35'$ und $\delta = 20'$ betrug; die monochromatische Strahlung wurde von einem Sylvinspaltstück ($\varphi = 7^\circ 28'$) geliefert; somit betrug die ausgesandte Wellenlänge

$$\lambda_0 = 130 \cdot 2a \cdot 10^{-3}$$

(a = Würfelebenenabstand von Sylvin).

1) Betreffs Ausführung dieser Konstruktion vgl. Dissertation.

Die nach 23stündiger Expositionszeit in großer Zahl auf dem sekundären Bild (Fig. 10b) erschienenen Interferenzpunkte sind in Tabelle XVIII zusammengestellt, wobei als Einheit der Wellenlänge dieses Mal statt des Würfelebenenabstandes a' der Netzebenenabstand der Fläche 011.

$$\left(d' = \frac{a'}{\sqrt{2}} \right)$$

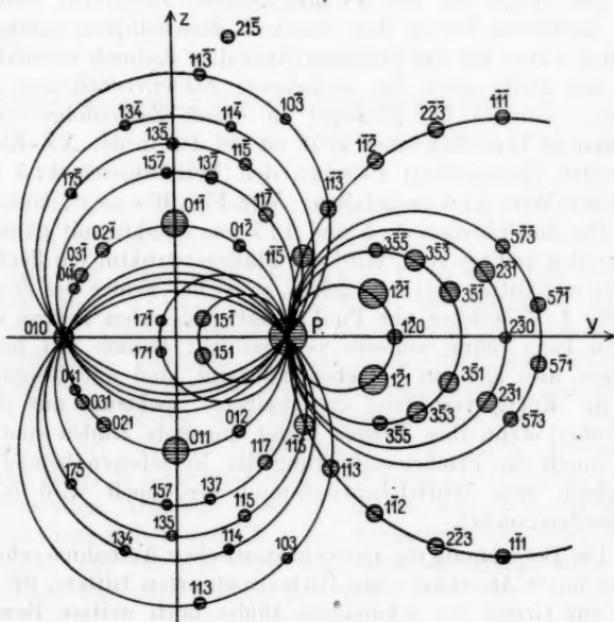


Fig. 10a. „Weißes“ Photogramm.

gewählt, da sich später ergeben wird, daß bei Flußpat eine Anomalie in bezug auf den Abstand aufeinanderfolgender Würfelflächen vorliegt.

Die charakteristischen Werte, um die sich die Wellenlängen gruppieren, sind 296, 148, 74, 50.

Aus Intensitätsgründen können als Grundwellenlänge nur die Werte 148 oder 74 in Frage kommen. Im letzteren Fall müßte jedoch der ziemlich intensive Punkt 010 als Vertreter der vierten Ordnung gedeutet werden; auch wäre dann das Erscheinen von Punkt $\overline{1}\overline{1}5$ mit 50,4 nicht zu erklären, während

er sich zwanglos als zweiter Oberton $\lambda_0/3$ auffassen läßt, sobald die Grundwellenlänge = 148 gesetzt wird.

Die Bestimmung des genauen Wertes von λ_0 , der für die Gitterkonstantenvergleichung nötig ist, wird durch die große Anzahl der auf der monochromatischen Aufnahme erschienenen

Anm.: Die eingeklammerten Buchstaben gelten im Fall des Braggschen Raumgittermodells.

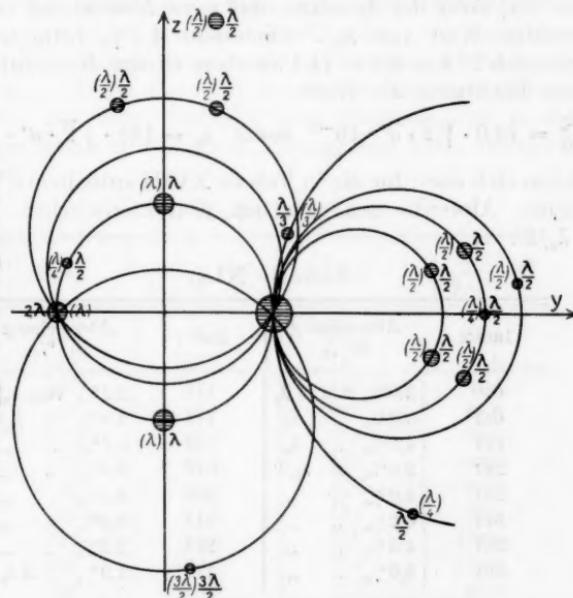


Fig. 10 b. „Monochromatisches“ Photogramm.

Tabelle XVIII.

| Index | $\frac{\lambda_0}{\sqrt{2 \cdot d'}} \cdot 10^3$ | Index | $\frac{\lambda_0}{\sqrt{2 \cdot d'}} \cdot 10^3$ |
|-------|--|-------|--|
| 010 | 302,0 | 115 | 50,4 |
| 011 | 148,0 | 114 | 71,1 |
| 011 | 154,0 | 134 | 72,4 |
| 231 | 71,9 | 041 | 71,4 |
| 231 | 71,0 | 230 | 76,9 |
| 571 | 70,9 | 215 | 74,6 |
| 351 | 77,3 | 113 | 225,0 |
| 351 | 76,7 | 223 | 75,6 |

Punkte sehr erleichtert: Punkt $\bar{3}\bar{5}\bar{1}$ mit 77,3 ist gerade noch sichtbar; der erste Oberton $\lambda_0/2$ kann sich also höchstens um $4,5\%$ von 77,3 unterscheiden, d. h. die untere Grenze des für $\lambda_0/2$ möglichen Spielraums ist somit $77,3 - 3,5 = 73,8$. Andererseits ist dagegen der Punkt $\bar{2}\bar{2}\bar{3}$ mit 77,6 nicht mehr zu sehen; unter der Annahme, daß seine Abweichung von dem gesuchten Wert von $\lambda_0/2$ mindestens $4,5\%$ betragen muß, ergibt sich $77,6 - 3,5 = 74,1$ als obere Grenze dieses Intervalls. Unter Benützung des Wertes

$$\frac{\lambda_0}{2} = 74,0 \cdot \sqrt{2} \cdot d' \cdot 10^{-3} \text{ somit } \lambda_0 = 148 \cdot \sqrt{2} \cdot d' \cdot 10^{-3}$$

ergeben sich dann für die in Tabelle XVIII enthaltenen Punkte folgende Abweichungen von den charakteristischen Werten λ_0 , $\lambda_0/2$. . . :

Tabelle XIX.

| Index | Abweichung in % | Index | Abweichung in % |
|-------|-----------------------|-------|------------------------|
| 010 | 2,0% von $2\lambda_0$ | 115 | 2,2% von $\lambda_0/3$ |
| 011 | 0,0% „ λ_0 | 114 | 4,0% „ $\lambda_0/2$ |
| 011 | 4,0% „ λ_0 | 134 | 2,2% „ „ |
| 231 | 2,8% „ $\lambda_0/2$ | 041 | 3,5% „ „ |
| 231 | 4,0% „ „ | 230 | 3,9% „ „ |
| 571 | 4,2% „ „ | 215 | 0,8% „ „ |
| 351 | 4,4% „ „ | 223 | 2,2% „ „ |
| 351 | 3,6% „ „ | 113 | 1,3% „ $3\lambda_0/2$ |

An den symmetrischen Punkten $2\bar{3}\bar{1}$ bzw. $\bar{2}31$ und $3\bar{5}\bar{1}$ bzw. $\bar{3}51$, die auf der „weißen“ Aufnahme keinerlei Schwärzung Unterschiede zeigen, läßt sich sehr schön beobachten, wie jedesmal der Punkt mit der größeren Abweichung auf dem monochromatischen Photogramm (Fig. 10b) etwas weniger intensiv gekommen ist, ein Beweis dafür, daß der Wert

$$\lambda_0 = 148 \cdot \sqrt{2} \cdot d' \cdot 10^{-3}$$

genau richtig sein muß. Der Vertreter des zweiten Oberschalls $\lambda_0/3$, Punkt $1\bar{1}\bar{5}$, ist schwach, aber mit unzweifelhafter Deutlichkeit zu erkennen. $1\bar{1}\bar{7}$ mit 50,8, dessen Divergenz 3% von $\lambda_0/3$ beträgt, ist an der Grenze der Sichtbarkeit und deshalb in Tabelle XIX nicht aufgenommen worden. Die schon früher bei dem zweiten Sylvinvorschlag konstatierte Tatsache,

daß die Intensität des in dritter Ordnung reflektierten ersten Obertons $\lambda_0/2$ eben groß genug ist, um auf dem monochromatischen Photogramm vertreten zu sein, hat durch das Erscheinen von 113 mit 1,8% Abweichung von $3\lambda_0/2$ eine Bestätigung gefunden.

In der folgenden Tabelle sind die Wellenlängen aller übrigen auf dem primären Photogramm bei halbstündiger Expositionszeit sichtbaren Punkte zusammengestellt, um nachzusehen, ob keiner innerhalb des früher definierten Divergenzbereiches des Grundtons oder eines Obertons liegt, so daß er auf dem monochromatischen Photogramm hätte sichtbar sein müssen.

Tabelle XX.

| Index | $\frac{\lambda_0}{\sqrt{2 \cdot d'}} \cdot 10^8$ | Index | $\frac{\lambda_0}{\sqrt{2 \cdot d'}} \cdot 10^8$ |
|-------|--|-------|--|
| 1̄20 | 69,8 | 5̄73 | 63,4 |
| 1̄21 | 59,2 | 117 | 47,6 |
| 1̄21 | 57,2 | 13̄7 | 64,4 |
| 10̄3 | 97,1 | 137 | 61,6 |
| 103 | 93,5 | 15̄7 | 66,8 |
| 114 | 68,4 | 157 | 64,6 |
| 134 | 70,6 | 115 | 95,2 |
| 01̄2 | 62,8 | 115 | 90,7 |
| 012 | 58,0 | 135 | 108,0 |
| 02̄1 | 122,0 | 135 | 104,0 |
| 021 | 120,0 | 17̄5 | 82,6 |
| 031 | 91,2 | 175 | 81,0 |
| 031 | 90,0 | 113 | 231,0 |
| 041 | 70,7 | 115 | 46,0 |
| 11̄2 | 110,0 | 113 | 122,0 |
| 11̄2 | 106,0 | 113 | 115,0 |
| 223 | 77,6 | 111 | 438,0 |
| 353 | 63,6 | 111 | 430,0 |
| 353 | 61,9 | 117 | 50,8 |
| 355 | 46,7 | 15̄1 | 183,0 |
| 355 | 44,7 | 151 | 182,0 |
| 5̄71 | 70,5 | 17̄1 | 120,5 |
| 573 | 64,3 | 171 | 120,0 |

Gitterkonstantenvergleichung. Nach obigem lautet die Beziehung für die in d' (Netzebenenabstand der Dodekaederfläche

von Flußspat im Fall eines flächenzentrierten Raumgitters) ausgedrückte Grundwellenlänge

$$\lambda_0 = 0,148 \cdot \sqrt{2} \cdot d'.$$

Andererseits betrug der früher in a (Würfelebenenabstand von Sylvin) gemessene Wert

$$\lambda_0 = 0,130 \cdot a$$

oder $\lambda_0 = 0,130 \cdot \sqrt{2} \cdot d$

wenn mit $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$ der Netzebenenabstand der Dodekaederfläche bezeichnet wird; somit ergibt sich das Verhältnis

$$d : d' = 0,148 : 0,130 = 1 : 0,878.$$

Eine theoretische Berechnung dieses Verhältnisses liefert nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$\left. \begin{array}{ll} M = 74,56 & M' = 78,09 \\ s = 1,98 & s' = 3,18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sylvin,} \\ \text{Flußspat} \end{array}$$

in die Formel

$$d : d' = \sqrt[3]{\frac{M}{s}} : \sqrt[3]{\frac{M'}{s'}} \text{ den Wert } 1 : 0,867.$$

Die gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Resultat $1 : 0,878$ — der Unterschied beträgt nur $1,3\%$ — bildet eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit der Annahme, daß das Flußspatgitter zum flächenzentrierten Typus gehören muß.

Struktur. Die Tatsache, daß sich auf dem monochromatischen Photogramm die Wirkungen sehr vieler Netzebenen nebeneinander vorfinden, ermöglicht uns eine genaue Prüfung des von W. L. Bragg¹⁾ auf Grund von Reflexionsmessungen an nur drei Ebenen (010, 011, 111) aufgestellten Raumgittermodells (Einfügung von 8F-Atomen in den Elementarkubus eines flächenzentrierten Ca-Gitters). Die dadurch verursachte Verminderung des Netzebenenabstandes bewirkt nämlich eine entsprechende Kürzung der für diese Ebenenfolge passenden Wellenlänge; verschiedene Interferenzpunkte auf dem sekundären Bild werden dann als Vertreter höherer Obertöne aufzufassen sein und es ist zu untersuchen, ob sich diese neue

1) Proc. Roy. Soc. 89. p. 468. 1914.

Deutung mit ihrem gegenseitigen Intensitätsverhältnis in Einklang bringen läßt.

Eine analytisch-geometrische Betrachtung ergibt¹⁾, daß in bezug auf die Änderungen des Netzebenenabstandes durch Einführung der *F*-Atome folgende Fälle zu unterscheiden sind:

- a) Ebenen mit lauter ungeraden Indizes; Auftreten von Zwischenebenen in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des ursprünglichen Netzebenenabstands.
- b) Ebenen mit gemischten Indizes, Summe der Indizes einer gerade Zahl: keine neuen Ebenen.
- c) Ebenen mit gemischten Indizes, Summe der Indizes einer ungerade Zahl: Halbierung des ursprünglichen Netzebenenabstands.

Ein sicheres Kriterium läßt sich nur mit Hilfe der Klasse c) angehörenden Punkte 010, $04\bar{1}$, $2\bar{3}0$, $2\bar{2}3$ gewinnen. Die Punkte $04\bar{1}$, $2\bar{3}0$, $2\bar{2}3$ sind nunmehr als Vertreter des dritten Obertons $\lambda_0/4$ aufzufassen; alle drei gehören sie zu den schwächsten Punkten des Photogramms (Fig. 10b), jedoch sind zwei von ihnen unzweifelhaft zu erkennen. Diese Tatsache mag aus Intensitätsgründen zunächst etwas befremdend erscheinen, da bei den Steinsalzaufnahmen seinerzeit sogar die Vertreter des zweiten Obertons $\lambda_0/3$ ausgeblieben sind. Dazu ist jedoch zu bemerken, daß die Flußspataufnahme mehr als doppelt so lange Zeit exponiert wurde als die Steinsalzaufnahme. Ferner kann der Einwand erhoben werden, daß auf dem Photogramm (Fig. 10b) der Punkt $1\bar{1}\bar{5}$, der von $\lambda_0/3$ sich nur um 2,2% unterscheidet, nicht viel besser zu erkennen ist als $04\bar{1}$, $2\bar{3}0$, $2\bar{2}3$, obgleich diese einer höheren Ordnung angehören. Diese Erscheinung kann aber vielleicht auf die Inkonstanz der Schleierschwärzung der photographischen Platte zurückzuführen sein, welche naturgemäß gerade bei diesen, eben noch sichtbaren Schwärzungsflecken von großer Bedeutung ist.

Die nunmehr erforderliche Deutung von 010 als Reflexion erster Ordnung von λ_0 stimmt dagegen mit dem experimentellen Befunde sehr gut überein; denn die relative Intensität dieses Punktes ist bei Flußspat wesentlich größer als bei Bromkalium

1) Weiter tragend ist die von Ewald, Ann. d. Phys. 44. p. 261. 1914, angegebene Methode des Strukturfaktors.

und Sylvin, obgleich die Abweichung bei diesen Kristallen nur $0,8\%$ bzw. $0,4\%$, bei Flußspat dagegen 2% betrug.

Einen weiteren Beweis für die Richtigkeit dieses Raumgittermodells liefert eine Vergleichung einer primären Steinsalzaufnahme (Nr. 3, Tafel V) mit dem Flußspatphotogramm (Nr. 2, Tafel IV) (die Orientierung der Kristalle war bei beiden Aufnahmen annähernd gleich): Während bei Steinsalz die Punkte $01\bar{2}$, $\bar{1}20$, $\bar{1}\bar{2}1$, $1\bar{2}1$ alle sehr starke Schwärzung aufweisen, haben bei Flußspat die Punkte 012 , $01\bar{2}$ und $1\bar{2}0$ gegenüber von $\bar{1}\bar{2}1$ und $1\bar{2}1$ ganz bedeutend an Intensität verloren; dieses Resultat erscheint zunächst befremdend, da nach Tabelle XX die Wellenlängen von $1\bar{2}0$ und $\bar{1}\bar{2}1$ sich kaum unterscheiden und außerdem auch die beiden Indexquadratsummen fast gleich groß sind. Unter Annahme des Braggschen Raumgittermodells sind jedoch die beiden Wellenlängen verschieden ($1\bar{2}0$ gehört zu Klasse e, $\bar{1}\bar{2}1$ zu Klasse b) und da nach den früheren Erfahrungen die sehr kurzen Wellenlängen im primären Spektrum nur spärlich vertreten sind, so muß $1\bar{2}0$ wesentlich schwächer sein als $\bar{1}\bar{2}1$.

§ 7. Energieverteilung.

Im I. Teil dieser Untersuchungen wurde experimentell bewiesen, daß die von der Röntgenröhre ausgesandte Strahlung aus einem Gemisch von vielen verschiedenen Wellenlängen besteht; in welcher Intensität¹⁾ sind nun bei der benutzten Röhrenhärte die einzelnen Wellenlängen auf den Photogrammen vertreten? Die Schwärzung der Interferenzflecke ist bestimmt

1. durch die photographisch²⁾ wirksame Intensität der einfallenden Welle,
2. durch das verschiedene spektrale Auflösungsvermögen der einzelnen Netzebenen (η_1 , η_2 , η_3); Lorentzscher Faktor

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}.$$

1) Die Bestimmung der Energieverteilung aus Interferenzphotogrammen wurde zuerst angegeben von Sommerfeld (Solvay-Note) und inzwischen ausführlich diskutiert von Ewald (Ann. d. Phys. 44. p. 257. 1914).

2) *Anmerkung bei der Korrektur:* Wie wenig die Kurve der photographischen Intensität die wahre Energieverteilung liefert, vgl. E. Wagner, Ann. d. Phys. 46. p. 880. 1915 (Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen nach der Broglieschen Methode).

Eine Zusammenstellung der bei den Aufnahmen vorkommenden kürzesten Wellenlängen ergibt, daß die betreffenden Interferenzpunkte trotz relativ kleinen S der entsprechenden Netzebenen nur geringe Schwärzung aufweisen. Die Größe des Intensitätsabfalls nach der Seite der kurzen Wellenlängen ist am besten ersichtlich durch eine Vergleichung der Schwärzungen der Punkte $02\bar{3}$ und 023 auf den Steinsalzphotogrammen Nr. 3 und Nr. 4 (Tafel V). Aus der früher angegebenen Orientierung des Kristalls berechnen sich die Wellenlängen

$$\begin{aligned} \text{für } (02\bar{3}) & \left. \begin{array}{l} \\ (023) \end{array} \right\} \text{ auf Nr. 3 zu } 43 \\ \text{für } (02\bar{3}) & \left. \begin{array}{l} \\ (023) \end{array} \right\} \text{ auf Nr. 4 zu } \left\{ \begin{array}{l} 34 \\ 52 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

wobei als Einheit wieder $\lambda_0/2a \cdot 10^3$ gewählt ist (a = Würfelenbenenabstand von Steinsalz). Während auf Nr. 3 beide Punkte gleich gut zu sehen sind, ist auf Nr. 4 nur der Punkt 023 sichtbar. Beide Aufnahmen waren mit der gleichen Röhre gleich lang (20 Minuten) exponiert worden. Da auf Nr. 3 Punkt $02\bar{3}$ mit Wellenlänge 43 noch gut zu sehen ist, so muß der Abfall zwischen 43 und 34 ein sehr bedeutender sein.

Die Schwärzungsverhältnisse der von gleichwertigen Netzebenen herrührenden Punkte $\bar{1}21$, $\bar{1}2\bar{1}$, $\bar{1}12$ und $\bar{1}1\bar{2}$ liefern direkt ein Maß für die photographische Intensität der einzelnen Wellenlängen im primären Spektrum:

Tabelle XXI.

| Index | $\frac{\lambda}{2a} \cdot 10^3$ |
|-------------------|---------------------------------|
| $\bar{1}21$ | 60 |
| $\bar{1}2\bar{1}$ | 72 |
| $\bar{1}12$ | 100 |
| $\bar{1}1\bar{2}$ | 126 |

Auf Photogramm Nr. 4 ist zwischen den sehr starken Schwärzungen von $\bar{1}21$ und $\bar{1}2\bar{1}$ kaum ein Unterschied zu erkennen; die Energiekurve wird somit zwischen 60 und 70 nur wenig ansteigen. Gehen wir nun zu längeren Wellenlängen

über, so zeigt ein Vergleich der Schwärzungen von $\bar{1}2\bar{1}$, $\bar{1}12$ und $\bar{1}\bar{1}2$, daß das Maximum der photographischen Intensität überschritten ist. Noch deutlicher ist dieser Intensitätsabfall aus einer Vergleichung von $\bar{1}13$ (mit 102) und $\bar{1}\bar{1}3$ (mit 146) zu erkennen; auf der Kontrollaufnahme Nr. 3 sind die entsprechenden Punkte beide gleich gut zu sehen. Die Tatsache, daß sich im Bereich der ganz langen Wellenlängen nur einzelne wenige Vertreter finden, ist damit zu erklären, daß bei der benutzten Orientierung der Kristalle ein sehr großer Netzebenenabstand erforderlich ist, damit überhaupt solch lange Wellenlängen auftreten können. Infogedessen konnten auch auf keinem der Photogramme Einflüsse von Eigenstrahlung des Antikathodenmaterials nachgewiesen werden.

Diese Überlegungen lassen sich dahin kurz zusammenfassen: „In der benutzten Primärstrahlung sind die kurzen Wellenlängen, ebenso wie die langen Wellenlängen, nur spärlich vertreten, während das Maximum der photographischen Intensität in dem Intervall $\lambda/2a \cdot 10^8 = 60$ bzw. 70 enthalten ist.“

Dieses Resultat liefert sofort eine Erklärung für die oben mehrfach konstatierte, auffallende Tatsache, daß auf den monochromatischen Photogrammen die durch den ersten Oberton ($\lambda_0/2$) erzeugten Interferenzpunkte ebenso intensiv geschwärzt sind wie die Vertreter der Grundwellenlänge λ_0 . Die primären Kristalle waren nämlich so aufgestellt, daß sich für die Grundwellenlänge λ_0 in der ausgesandten monochromatischen Strahlung etwa der Wert 140 ergab, somit entspricht der erste Oberton $\lambda_0/2$ gerade dem Maximum der photographischen Intensität.

Zusammenstellung der Resultate.

1. Natur der Interferenzstrahlen.

1. Die von einem Steinsalzraumgitter abgebeugten Röntgenstrahlen sind „monochromatisches“ Röntgenlicht; in jedem abgebeugten Strahl ist nur eine einzige Wellenlänge bzw. deren Obertöne enthalten, während die von der Röhre ausgesandte Primärstrahlung aus einer kontinuierlichen Folge von verschiedenen Wellenlängen besteht.

2. Durch analoge Versuche mit Sylvin wird die allgemeine Gültigkeit des unter 1. ausgesprochenen Satzes bewiesen.
3. Das starke Hervortreten des ersten Obertons auf den monochromatischen Photogrammen wird erklärt durch die Eigenart der spektralen Energieverteilung in der Primärstrahlung.
4. Auf Grund der erhaltenen Photogramme wird der qualitative Verlauf der Energiekurve beschrieben und näherungsweise angegeben, in welchem Wellenlängenintervall bei der benützten Röhrenhärte die maximale photographisch wirksame Energie ausgestrahlt wird.

2. Kristallstruktur.

5. Das Steinsalzraumgitter (a_0) gehört zum flächenzentrierten Typus, während das Raumgitter des Sylvins (a_1) einfache kubisch ist; das Verhältnis der Gitterkonstanten wird experimentell bestimmt zu

$$a_0 : a_1 = 1 : 1,122.$$

6. Das Bromkaliumgitter kann erklärt werden als ein flächenzentriertes Gitter von Bromatomen; für das Verhältnis seiner Gitterkonstanten (a_2) zu der des Steinsalzes (a_0) ergibt sich der experimentelle Wert

$$a_0 : a_2 = 1 : 1,150.$$

7. Für das Flußpatgitter, das ebenfalls zum flächenzentrierten Typus gehört, wird experimentell ermittelt, daß die Kantenlänge (a_3) seines Elementarkubus sich zu der von Sylvin (a_1) verhält wie

$$a_1 : a_3 = 1 : 0,878.$$

8. Es wird nachgewiesen, daß das nach dem Vorschlag von W. L. Bragg (durch Einführung von 8F-Atomen pro Elementarkubus) sich ergebende Raumgittermodell für Flußpat mit den erhaltenen Versuchsergebnissen im Einklang steht.

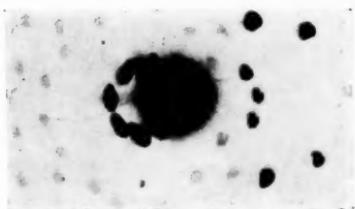
Die vorliegende Arbeit wurde vom Januar 1913 bis Ostern 1914 im Physikalischen Institut der Universität München ausgeführt.

Es sei mir hier gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Röntgen, für das stets bewiesene Wohlwollen und für das große Interesse, das er diesen Untersuchungen entgegenbrachte, meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

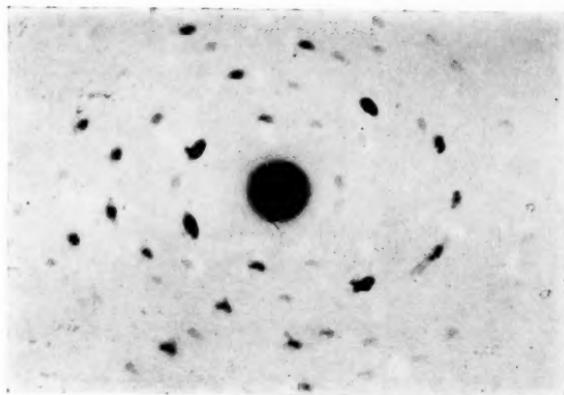
Herrn Professor Dr. Wagner bin ich für viele wertvolle Ratschläge zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 31. März 1915.)

Ostern
n aus-
ehrer,
Wohl-
Unter-
k aus-
rtvoller

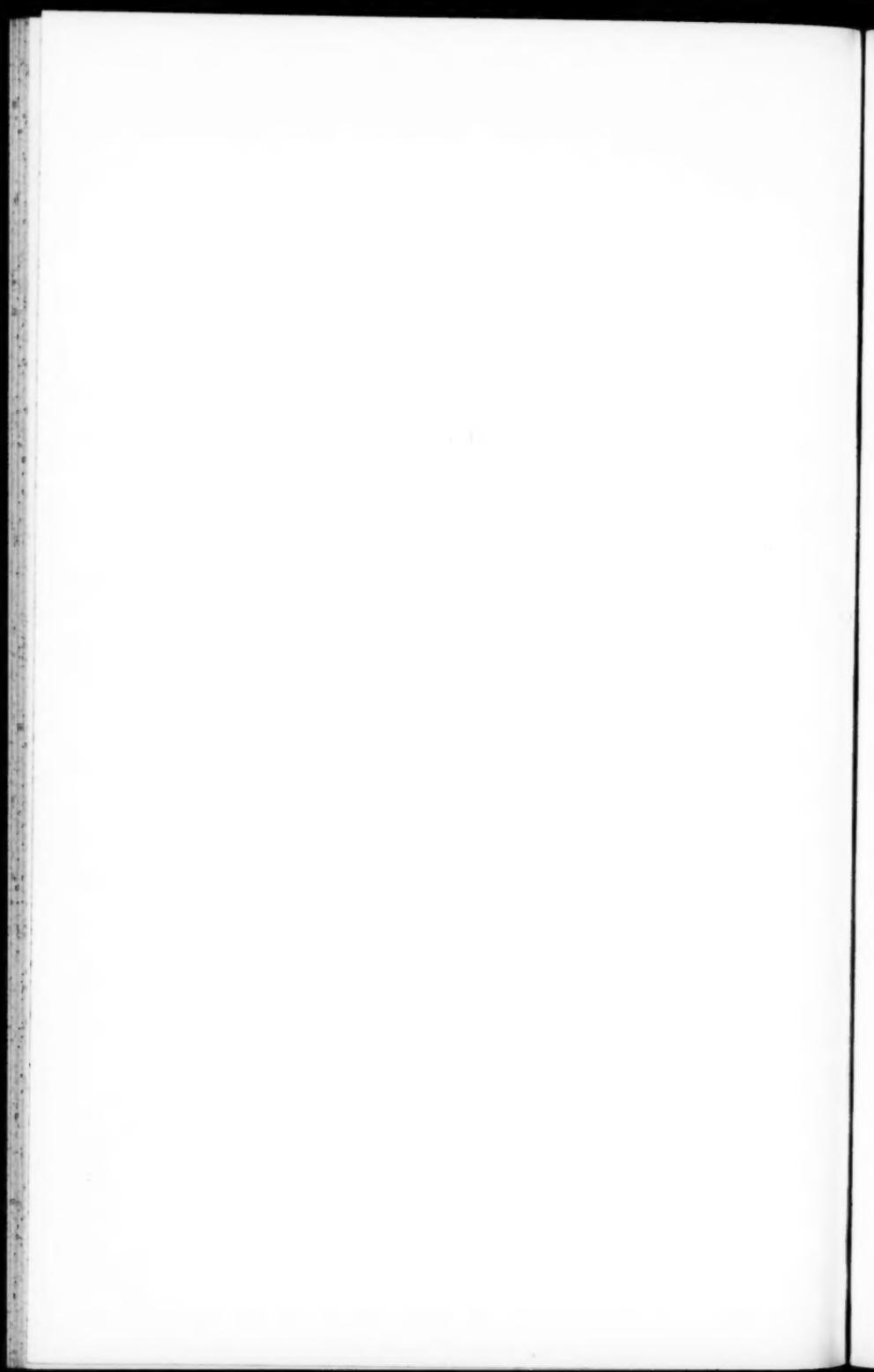


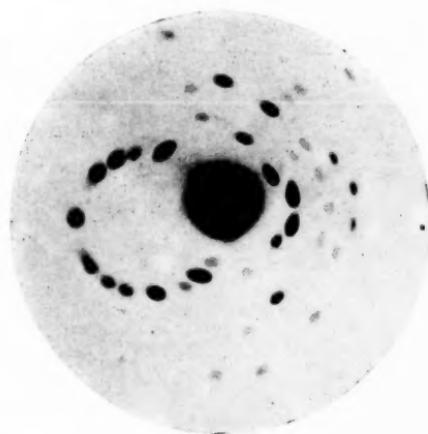
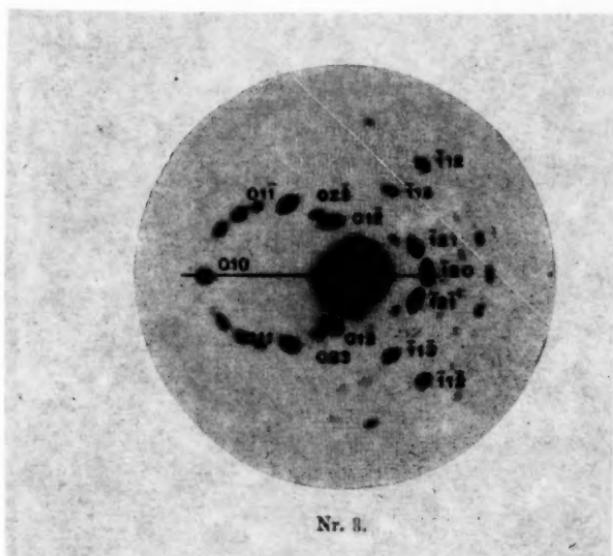
Nr. 1.



Nr. 2.

R. Glocker.





Nr. 4.

R. Glocker.

